Resolutsiooni meetod ja lausete tuletamine

Peeter Lorents, Erika Matsak

Laused

- 1-järku predikaatarvutuse raames nimetatakse ***lauseteks*** valemeid, milles puuduvad vabad muutujad

Näide 1. Valemid $(\forall x)(\exists y)[(x \in R)\&(y \in R)\&(x<y)]$, $3>1$, $(\exists z)[z \leq 9]$ **on laused**

Näide 2. Valemid $(\exists y)[(m \in R)\&(y \in R)\&(m<y)]$, $3>d$, $(\forall z)[z \leq n]$ **ei ole laused**

- Kui piirdume ainult selliste valemitega, mis on laused, siis saame predikaatarvutuse „vähendatud“ variandi, mida nimetatakse ***lausete arvutuseks***
- Lihtsuse mõttes kasutatakse lausete tähistena sageli nn ***lausemuutujaid***.

Resolutsiooni reegel 1

Olgu meil kaks disjunktsiooni:

$A1 \vee \ldots \vee Ai\text{-}1 \vee Ai \vee Ai{+}1 \vee \ldots \vee Am$ ning

$B1 \vee \ldots \vee Bj\text{-}1 \vee Bj \vee Bj{+}1 \vee \ldots \vee Bn$.

Kui osutub, et disjunkt Ai on disjunkti Bj eitus, või osutub, et disjunkt Bj on disjunkti Ai eitus, siis on eelnimetatud disjunktsioonidele rakendatud reolutsiooni tulemuseks ehk ***resolvendiks*** valem

$A1 \vee \ldots \vee Ai\text{-}1 \vee Ai{+}1 \vee \ldots \vee Am \vee B1 \vee \ldots \vee Bj\text{-}1 \vee Bj{+}1 \vee \ldots \vee Bn$.

Resolutsiooni reegel 2

Olgu meil kaks kahe disjunktiga disjunktsiooni:

$A1 \vee A2$ ning

$B1 \vee B2$

NB! Ärme unusta, et disjunktsioonis pole disjunktide järjekord oluline.

Kui osutub, et disjunkt A1 on disjunkti B1 eitus, või osutub, et disjunkt B1 on disjunkti A1 eitus, siis on eelnimetatud disjunktsioonidele rakendatud reolutsiooni tulemuseks ehk ***resolvendiks*** valem

$A2 \vee B2$.

Resolutsiooni reegel 3

Olgu meil kaks disjunktsiooni, ühes on kaks disjunkti, teises vaid üks:

$A1 \vee A2$ ning

$B1$

NB! Ärme unusta, et disjunktsioonis pole disjunktide järjekord oluline.

Kui osutub, et disjunkt A1 on disjunkti B1 eitus, või osutub, et disjunkt B1 on disjunkti A1 eitus, siis on eelnimetatud disjunktsioonidele rakendatud reolutsiooni tulemuseks ehk ***resolvendiks*** valem

$A2$.

Resolutsiooni reegel 4

Olgu meil kaks disjunktsiooni, mõlemas on vaid üks disjunkt:

A1 ning

B1

Kui osutub, et disjunkt A1 on disjunkti B1 eitus, või osutub, et disjunkt B1 on disjunkti A1 eitus, siis on eelnimetatud disjunktsioonidele rakendatud reolutsiooni tulemuseks ehk ***resolvendiks*** „tühi disjunktsioon“ ehk „tühi resolvent“ ehk „tühi valem“ ehk „eimiski“ vms

Oluline teoreem

Olgu meil mingitest lausemuutujatest või nende eitustest moodustatud disjunktsioonide hulk H ning mingi valem M. Vaatleme hulka $H\cup\{\neg M\}$.

Kui on võimalik ehitada selline „kahendpuu“, mille

1. harude hargnemiskohtades paikneb sobiv resolutsiooni reegli rakendamine ja
2. mille tippudeks on kõik hulgast $H\cup\{\neg M\}$ pärit valemid ning
3. milles kõige all (ja mitte mujal) paikneb tühi resolvent,

siis võime väita, et valem M on tuletatav hulga H elementidest.

Teoreemi rakendamisest

- Kui soovime antud teoreemi rakendada mingile niisuguste **lausete arvutuse** valemite hulgale H′, mis ei koosne ainult sobivatest lausemuutujatest või nende eitustest moodustatud disjunktsioonidest – siis tuleb rakendada teisendusi, mis võimaldab iga valemi (*meenutame, et siinkohal piirdume lausetega*) hulgast H′ teisendada selle valemiga ekvivalentseks disjunktsiooniks, milles disjunktideks on nn ***literaalid*** ehk *lausemuutujad* või *lausemuutujate eitused.* (**Nimetatud teisendusi vaatleme järgmisel slaidil**).
- Kui meil on aga tegemist **predikaatarvutuse** valemitega, mis pole laused, siis tuleb veel rakendada muidki teisendusi (**mida me siinkohal ei vaatle**), selleks, et näiteks „mitte tegeleda“ kvantoritega (tekitades nn *kvantorprefikseid*); või selleks, et „ühtlustada“ (*unifitseerida*) indiviidsümbolite tähendused; või selleks, et saaks kasutada valemite teatavat „standardset vormi“ (nimelt – *konjunktiivset normaalkuju*).

Mõned kasulikud teisendused

- $\neg(\neg A)$ teisendame valemiks A
- $\neg(A \vee B)$ teisendame valemiks $(\neg A) \& (\neg B)$
- $\neg(A \& B)$ teisendame valemiks $(\neg A) \vee (\neg B)$
- $A \supset B$ teisendame valemiks $(\neg A) \vee B$
- $A \Leftrightarrow B$ teisendame valemiks $[(\neg A) \vee B] \& [(\neg B) \vee A]$

Näide (algus)

Veendume, et väidetest *„neutron pole elektriliselt laetud“* ning *„kui Juku katse on laitmatu, siis neutron on elektriliselt laetud“*, saab tuletada väite *„Juku katse pole laitmatu“*.

Kasutame tähiseid $P(n)$, $L(k)$, $L(k) \supset \neg P(n)$, $\neg L(k)$ ja veendume, et **valemitest $P(n)$, $L(k) \supset \neg P(n)$ on võimalik tuletada valemit $\neg L(k)$**.

Selleks veendume, et rakendades valemitele $P(n)$, $L(k) \supset \neg P(n)$, $\neg(\neg L(k))$ teisendusi ja resolutsioone jõuame tühja resolvendini.

Rakendame teisendusi:

$L(k) \supset \neg P(n)$ teisendame valemiks $(\neg L(k)) \vee \neg P(n)$

$\neg(\neg L(k))$ teisendame valemiks $L(k)$

Näide (lõpp)

Ehitame kahendpuu, mille tippudeks on teisendamise tulemusena saadud valemid $P(n)$, $(\neg L(k)) \vee \neg P(n)$, $L(k)$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{P(n)} \arrow[dr] & & \mathbf{(\neg L(k)) \vee \neg P(n)} \arrow[dl] & \\
& \neg L(k) \arrow[dr] & & \mathbf{L(k)} \arrow[dl] \\
& & \text{Eimiski} &
\end{tikzcd}
$$

Näide (täitsa lõpp)

Kasutades teisendusi, saime valemite hulga

$\{P(n), L(k) \supset \neg P(n), \neg(\neg L(k))\}$

asemel lähtuda hulgast $\{P(n), (\neg L(k)) \vee \neg P(n), L(k)\}$ ning jõuda resolutsioonide abil *eimiski* ehk *tühja resolvendini*.

Sel teel saime veenduda, et väidetest „*neutron pole elektriliselt laetud*“ ning „*kui Juku katse on laitmatu, siis neutron on elektriliselt laetud*“, ongi tuletatav väide „*Juku katse pole laitmatu*“.