

Lõplikud ja lõpmatud hulgad

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

1

Lõplikud hulgad

Teoreem. Kui A ja B on hulgad, siis $A \cup \{B\}$ on hulk.

Tõestus. Kui B on hulk, siis üksiku olemasolu aksioomi põhjal $\{B\}$ on hulk. Kui A on hulk ja $\{B\}$ on hulk, siis ühendhulga olemasolu aksioomi põhjal ka $A \cup \{B\}$ on hulk.

Määratlus.

- Tühi hulk on **lõplik hulk**
- Kui X on lõplik hulk ning H on hulk, siis $X \cup \{H\}$ on **lõplik hulk**

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

2

Naturaalarvud

Määratlus 1.

- Tühi hulk \emptyset on **naturaalarv null** ja selle tähiseks on sümbol **0**
- Kui hulk n on naturaalarv, siis hulk $n \cup \{n\}$ on **naturaalarv, mis vahetult järgneb arvule n** ja selle tähiseks on kirjutis **n+1**

Teoreem. Iga naturaalarv on lõplik hulk.

Määratlus 2. Kui n on naturaalarv ja n ei ole **0**, siis ütleme, et n on **positiivne** ja kirjutame **Pos(n)**

- $\text{Pos}(n) \int (\exists \alpha)[\alpha \in n]$

Määratlus 3. Kui naturaalarvude m ja n korral $m \in n$, siis ütleme, et **arv m eelneb arvule n** või **arv n järgneb arvule m** ja kirjutame **$m < n$** .

- $m < n \int m \in n \quad n \leq m \int \neg(m < n)$

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

3

Lõplike hulkade elementide arv

Määratlus.

- Tühja hulga elementide arv on 0
- Kui X on lõplik hulk, mille elementide arv on n ning H on hulk, siis hulga $X \cup \{H\}$ elementide arv on $n+1$
- $E(A) = m \int$ lõpliku hulga A elementide arv on m

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

4

ZF Lõpmatuse aksioom

- Lõpmatuse aksioom:
Eksisteerib vähemalt üks niisugune hulk L , mille korral selle hulga L üheks elemendiks on tühi hulk \emptyset
- kui vaadeldavasse hulka L kuulub elemendina mingi hulk H , siis kuulub hulka L elemendina ka hulk, mille tähiseks on $H+1$ ja mille (st $H+1$) elementideks on ainult kõik hulga H elemendid, kui H pole tühi ja hulk H ise
- Näide. Kui hulk H on tühi, siis hulgaks $H+1$ on $\{\emptyset\}$. Kui hulga H elementideks on x, y, z , siis hulga $H+1$ elementideks on x, y, z ja $\{x, y, z\}$.
- Märkus. Antud aksioom *ei ole* lõpmatuse määratlus!

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

5

ZF Lõpmatuse aksioom ja naturaalarvud

- Teoreem. Kui eksisteerib niisugune hulk L , mille korral selle hulga L üheks elemendiks on tühi hulk \emptyset
- kui vaadeldavasse hulka L kuulub elemendina mingi hulk H , siis kuulub hulka L elemendina ka hulk, mille tähiseks on $H+1$ ja mille (st $H+1$) elementideks on ainult kõik hulga H elemendid, kui H pole tühi ja hulk H ise
siis on hulga L elementideks kõik naturaalarvud
- Järeldus. Kõikide naturaalarvude hulk eksisteerib.
- Tõestus. Järeldub vahetult äsjaesitatud teoreemist ja lõpmatuse aksioomist.

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

6

Lõpmatud hulgad

Määratlus. Lõpmatuks hulgaks nimetame sellist hulka, mis pole lõplik.

- **Märkus.** Meenutame, et lõpmatuse aksiomis polnud juttu lõpmatute hulkade määratlusest! Postuleeriti vaid teatavate iseärasustega hulkade olemasolu ja mitte **ei formuleeritud** seda, mis on lõpmatu hulk **ega postuleeritud** nimetatud formuleeringule vastava hulga olemasolu. Sõna **lõpmatus** figureeris vaid kõnealuse aksioomi nimes.

- **Teoreem.** Kõikide naturaalarvude hulk eksisteerib ja on lõpmatu hulk.

Tõestus. Tugineb lõpliku hulga, lõpmatu hulga ja naturaalarvu ning lõpliku hulga elementide arvu mõistele, lõpmatuse ja väljaeraldamise aksiomile

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

7

Ordinaalarvud

Määratlus. (John von Neuman) Hulk H on **ordinaalarv** ehk lühemalt **ordinaal**, kui kõik H elemendid on hulgad ja

$$(\forall \alpha)[\alpha \in H \supset \alpha \subseteq H]$$

$$(\forall \alpha \beta \in H)[\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha]$$

$$(\forall \gamma \subseteq H)(\exists \alpha \in \gamma)[\alpha \cap \gamma = \emptyset].$$

Seejuures kõneldakse veel, et

H on **nullordinaal**, kui $H = \emptyset$

H on **järgordinaal**, kui mingi ordinaali A korral

$$H = A + 1, \text{ kus } A + 1 = A \cup \{A\}$$

H on **piirordinaal**, kui ta pole ei nullordinaal ega järgordinaal.

Näide. Hulk $\{\emptyset\}$ on järgordinaal (sest $\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$)

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

8

Ordinaalarvud ja naturaalarvud

Teoreem 1. Iga naturaalarv on ordinaal. Iga nullist erinev naturaalarv on seejuures järgordinaal.

Teoreem 2. Kõikide naturaalarvude kogum on hulk.

Tõestus. Lõpmatuse aksiomi põhjal leidub selline hulk H , mis sisaldab tühja hulka ning sisaldab koos iga elemendiga m veel elementi $m \cup \{m\}$.

Väljaeraldamise aksiomi põhjal leidub äsjaöeldu alusel hulk $\{\alpha \mid (\alpha \in H) \ \& \ (\alpha = \emptyset \vee [(\alpha \neq \emptyset) \supset (\exists \beta)(\beta \in \alpha \ \& \ \alpha = \beta + 1)])\}$.

See hulk ongi kõikide naturaalarvude hulk. Kõikide naturaalarvude hulga tähistamiseks kasutame kaht sümbolit:

\mathbb{N} ning ω .

Teoreem 3. Kõikide naturaalarvude hulk on piirordinaal.

- **Märkus.** Kõikide ordinaalarvude kogum ei ole hulk!

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

9

Lihtsaimad operatsioonid naturaalarvudega: liitmine, korrutamine, astendamine.

- $X + 0 = X$, $X + (Y+1) = (X + Y) + 1$
- $X \cdot 0 = 0$, $X \cdot (Y + 1) = (X \cdot Y) + X$
- $X^0 = 1$, $X^{(Y+1)} = (X^Y) \cdot X$

21.10.2013 (C) Peeter Lorents 13

Naturaalarvude tegurid

Määratlus. Naturaalarvud x ja y on **naturaalarvu n tegurid** kui kehtib võrdus $n = x \cdot y$

- Näiteks arvu 3 teguriteks on arvud 1 ja 3, kuna $3=1 \cdot 3$, arvu 30 teguriteks on arvud 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, kuna $30=1 \cdot 30=2 \cdot 15=3 \cdot 10=5 \cdot 6$.
- **NB!** Naturaalarv 1 on mistahes naturaalarvu n teguriks, kuna $n = 1 \cdot n$.
- **NB!** Naturaalarvul 1 on täpselt üks tegur – ta ise.
- **NB!** Iga naturaalarv x on naturaalarvu 0 teguriks, kuna $0 = x \cdot 0$. Seetõttu on arvul 0 lõpmata palju tegureid.

21.10.2013 (C) Peeter Lorents 14

Algarvud ja kordarvud ning arvude astmed

Määratlus 1. Algarvuks nimetame sellist naturaalarvu, millel on **täpselt kaks erinevat tegurit**.

Näide. Algarvuks on $3=1 \cdot 3$. Algarvuks ei ole 4, kuna $4=1 \cdot 4=2 \cdot 2$.
Algarvude tähisteks on vastavalt $p_0|2, p_1|3, p_2|5, \dots$

Määratlus 2. Kordarvuks nimetame sellist naturaalarvu, mis **ei ole 0, ei ole 1, ei ole algarv**.

Näide. Kordarvuks on $6=1 \cdot 2 \cdot 3$. Kordarvuks ei ole 5.

Määratlus 3. Mistahes arvu m korral on

- arvu m **nullis aste** m^0 on võrdne arvuga 1,
- arvu m **$n+1$ aste** m^{n+1} on võrdne korrutisega $m^n \cdot m$.

Näide. 9 on arvu 3 teine aste. 8 on arvu 2 kolmas aste.

21.10.2013 (C) Peeter Lorents 15

Naturaalarvude kanooniline esitus ja aritmeetika põhiteoreem

Määratlus.

- Naturaalarvu k kanooniliseks esituseks on $(p_m)^a$, kui $k=(p_m)^a$ või korrutis $(p_m)^a(p_n)^b \dots (p_r)^c$, kui $k=(p_m)^a(p_n)^b \dots (p_r)^c$, kus a, b, \dots, c on positiivsed naturaalarvud ja $0 \leq m < n < \dots < r$ on naturaalarvud.

Aritmeetika põhiteoreem.

Igal naturaalarvul, mis pole 0 ega 1, leidub täpselt üks kanooniline esitus.

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

16

Kirjutiste gödeliseerimine

- Olgu, et kirjutised on lõplikud ning jadakujulised.
- Olgu, et kirjutised koosnevad lõplikust hulgast pärit sümbolitest.
- Olgu eelnimetatud sümbolite hulgaks $\{s_0, s_1, \dots, s_m\}$
- Olgu $G(s_0)=p_0, G(s_1)=p_1, \dots, G(s_m)=p_m$
- Vaatleme kirjutist $k_1 k_2 \dots k_i$, kus k_1, k_2, \dots, k_i on pärit hulgast $\{s_0, s_1, \dots, s_m\}$.



Kurt Gödel (1906 – 1978)

Sellisel juhul olgu

$$G(k_1 k_2 \dots k_i) = (p_{m+1})^{G(k_1)} (p_{m+2})^{G(k_2)} \dots (p_{m+i})^{G(k_i)}$$

21.10.2013

(C) Peeter Lorents

17
