Lõplikud ja lõpmatud hulgad

Lõplikud hulgad

Teoreem. Kui A ja B on hulgad, siis $A \cup \{B\}$ on hulk.

Tõestus. Kui B on hulk, siis üksiku olemasolu aksioomi põhjal $\{B\}$ on hulk. Kui A on hulk ja $\{B\}$ on hulk, siis ühendhulga olemasolu aksioomi põhjal ka $A \cup \{B\}$ on hulk.

Määratlus.

- Tühi hulk on **lõplik hulk**
- Kui X on lõplik hulk ning H on hulk, siis $X \cup \{H\}$ on **lõplik hulk**

Naturaalarvud

Määratlus 1.

- Tühi hulk $\varnothing$ on **naturaalarv null** ja selle tähiseks on sümbol **0**
- Kui hulk **n** on naturaalarv, siis hulk $\mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$ on **naturaalarv, mis vahetult järgneb arvule n** ja selle tähiseks on kirjutis **n+1**

Teoreem. Iga naturaalarv on lõplik hulk.

Määratlus 2. Kui **n** on naturaalarv ja **n** ei ole **0**, siis ütleme, et **n on positiivne** ja kirjutame **Pos(n)**

- $\mathrm{Pos}(\mathbf{n}) \int (\exists \alpha)[\alpha \in \mathbf{n}]$

Määratlus 3. Kui naturaalarvude m ja n korral $m \in n$, siis ütleme, et **arv m eelneb arvule n** või **arv n järgneb arvule m** ja kirjutame **m < n**.

- $m < n \int m \in n$ $\qquad$ $n \leq m \int \neg(m < n)$

Lõplike hulkade elementide arv

<u>Määratlus.</u>

- **Tühja hulga elementide arv on 0**
- Kui X on lõplik hulk, mille elementide arv on n ning H on hulk, siis hulga $X \cup \{H\}$ **elementide arv on n+1**

- $E(A)=m$ ∫ **lõpliku hulga A elementide arv on m**

ZF Lõpmatuse aksioom

- **Lõpmatuse aksioom:**
  Eksisteerib vähemalt üks niisugune hulk L, mille korral selle hulga L üheks elemendiks on tühi hulk $\varnothing$
- **kui vaadeldavasse hulka L kuulub elemendina mingi hulk H, siis kuulub hulka L elemendina ka hulk, mille tähiseks on H+1 ja mille (st H+1) elementideks on ainult kõik hulga H elemendid, kui H pole tühi ja hulk H ise**
- **Näide. Kui hulk H on tühi, siis hulgaks H+1 on {$\varnothing$}. Kui hulga H elementideks on x,y,z, siis hulga H+1 elementideks on x,y,z ja {x,y,z}.**
- **Märkus.** Antud aksioom ***ei ole*** lõpmatuse määratlus!

ZF Lõpmatuse aksioom ja naturaalarvud

Teoreem. **Kui eksisteerib niisugune hulk L, mille korral**

- **selle hulga L üheks elemendiks on tühi hulk $\varnothing$**
- **kui vaadeldavasse hulka L kuulub elemendina mingi hulk H, siis kuulub hulka L elemendina ka hulk, mille tähiseks on H+1 ja mille (st H+1) elementideks on ainult kõik hulga H elemendid, kui H pole tühi ja hulk H ise**

siis on hulga L elementideks kõik naturaalarvud

Järeldus. Kõikide naturaalarvude hulk eksisteerib.

Tõestus. Järeldub vahetult äsjaesitatud teoreemist ja lõpmatuse aksioomist.

Lõpmatud hulgad

Määratlus. **Lõpmatuks hulgaks** nimetame sellist hulka, mis **pole lõplik.**

- **Märkus.** Meenutame, et **lõpmatuse aksioomis** polnud juttu lõpmatute hulkade määratlusest! Postuleeriti vaid teatavate iseärasustega hulkade olemasolu ja mitte **ei formuleeritud** seda, mis on lõpmatu hulk **ega postuleeritud** nimetatud formuleeringule vastava hulga olemasolu. Sõna **lõpmatus** figureeris vaid kõnealuse aksioomi nimes.
- **Teoreem.** Kõikide naturaalarvude hulk eksisteerib ja on **lõpmatu hulk**.

Tõestus. Tugineb lõpliku hulga, lõpmatu hulga ja naturaalarvu ning lõpliku hulga elementide arvu mõistetele, lõpmatuse ja väljaeraldamise aksioomile

Ordinaalarvud

<u>Määratlus.</u> (John von Neuman) Hulk H on ***ordinaalarv*** ehk lühemalt ***ordinaal***, kui kõik H elemendid on hulgad ja

$(\forall\alpha)[\alpha\in H \supset \alpha\subseteq H]$

$(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha=\beta \vee \alpha\in\beta \vee \beta\in\alpha]$

$(\forall\gamma\subseteq H)(\exists\alpha\in\gamma)[\alpha\cap\gamma=\varnothing]$.

Seejuures kõneldakse veel, et

H on ***nullordinaal***, kui $H=\varnothing$

H on ***järgordinaal***, kui mingi ordinaali A korral $H=A+1$, kus $A+1 \int A\cup\{A\}$

H on ***piirordinaal***, kui ta pole ei nullordinaal ega järgordinaal.

<u>Näide.</u> Hulk $\{\varnothing\}$ on järgordinaal (sest $\{\varnothing\}=\varnothing\cup\{\varnothing\}$)

Ordinaalarvud ja naturaalarvud

Teoreem 1. Iga naturaalarv on ordinaal. Iga nullist erinev naturaalarv on seejuures järgordinaal.

Teoreem 2. Kõikide naturaalarvude kogum **on hulk**.

Tõestus. Lõpmatuse aksioomi põhjal leidub selline hulk H, mis sisaldab tühja hulka ning sisaldab koos iga elemendiga m veel elementi $m \cup \{m\}$.
Väljaeraldamise aksioomi põhjal leidub äsjaöeldu alusel hulk $\{\alpha \mid (\alpha \in H) \,\&\, (\alpha = \varnothing \vee [(\alpha \neq \varnothing) \supset (\exists\beta)(\beta \in \alpha \,\&\, \alpha = \beta + 1)]\}$.

See hulk ongi kõikide naturaalarvude hulk. Kõikide naturaalarvude hulga tähistamiseks kasutame kaht sümbolit: **N** ning $\boldsymbol{\omega}$.

Teoreem 3. Kõikide naturaalarvude hulk on piirordinaal.

- **Märkus. Kõikide ordinaalarvude kogum ei ole hulk!**

Ordinaalarvude rollist

Ordinaalarvud, kui hulgad omavad oma sees elementide nn täielikku järjestust. Osutub (nagu tõestas John von Neuman), et ***igat täielikult järjestatud hulka*** saab n-ö võrrelda ordinaalidega. Selleks “kõrvutatakse” täielikult järjestatud hulk mingi ordinaaliga. Kui osutub, et ordinaali elementide ja kõrvale pandud hulga elementide vahel on selline üks-ühene vastavus, mille puhul vastavusse sätitud elemendid on ka vastavas järjestuses, siis kõneldakse, et hulgal on samasugune järjestustüüp, nagu eelmainitud ordinaalil.

Näide. Vaatleme hulka {O, V, Z, Δ, □}, milles järjestuse aluseks on kujundi nurkade arv. Samuti vaatleme ordinaali 5. Nagu teame 5={0,1,2,3,4}, kus järjestusena võime kasutada seost <. Nüüd korraldame vastavuse: O↔0, V↔1, Z↔2, Δ↔3, □↔4. Näeme, et vastavuses olevad elemendid on vastavas järjestuses. Seetõttu võime öelda, et hulga {O,V,Z,Δ,□} järjestustüübiks on 5.

Lihtsaimad operatsioonid hulkadega

- Hulkade **paar** $A\{\}B \int \{A,B\} \int \{z \mid z = A \vee z = B\}$
- Hulkade **ühend** $A \cup B \int \{z \mid z \in A \vee z \in B\}$
- Hulkade **ühisosa** $A \cap B \int \{z \mid z \in A \,\&\, z \in B\}$
- Hulkade **erisosa** $A \Delta B \int \{z \mid (z \in A \cup B) \,\&\, (z \notin A \cap B)\}$
- Hulkade **vahe** $A - B \int \{z \mid z \in A \,\&\, z \notin B\}$
- Hulga **täiend** $B' \int \{z \mid z \in A \,\&\, z \notin B \,\&\, B \subseteq A\}$
- Hulga **astmehulk** $2^A \int \{z \mid z \subseteq A\}$

Lihtsaimad operatsioonid lõplike hulkadega ja elementide arvud

- Hulkade **paar** $A\{\}B \int \{A,B\} \int \{z \mid z=A \vee z=B\}$
- **Kui $A \neq B$ siis $E(A\{\}B)=2$ ehk $E\{A,B\}=2$**
- Hulkade **ühend** $A \cup B \int \{z \mid z \in A \vee z \in B\}$
- Hulkade **ühisosa** $A \cap B \int \{z \mid z \in A \ \& \ z \in B\}$
- **$E(A \cup B) = E(A) + E(B) - E(A \cap B)$**
- Hulkade **erisosa** $A \Delta B \int \{z \mid (z \in A \cup B) \ \& \ (z \notin A \cap B)\}$
- **$E(A \Delta B) = E(A) + E(B) - 2E(A \cap B)$**
- Hulkade **vahe** $A - B \int \{z \mid z \in A \ \& \ z \notin B\}$
- **$E(A - B) = E(A) - E(A \cap B)$**
- Hulga **täiend** $B' \int \{z \mid z \in A \ \& \ z \notin B \ \& \ B \subseteq A\}$
- **$E(B') = E(A) - E(B)$**
- Hulga **astmehulk** $2^A \int \{z \mid z \subseteq A\}$
- **$E(2^A) = 2^{E(A)}$**

Lihtsaimad operatsioonid naturaalarvudega: liitmine, korrutamine, astendamine.

- $X + 0 = X$, $X + (Y+1) = (X + Y) + 1$
- $X \cdot 0 = 0$, $X \cdot (Y + 1) = (X \cdot Y) + X$
- $X^0 = 1$, $X^{(Y + 1)} = (X^Y) \cdot X$

Naturaalarvude tegurid

Määratlus. Naturaalarvud *x* ja *y* on ***naturaalarvu n tegurid*** kui kehtib võrdus ***n = x·y***

- Näiteks arvu 3 teguriteks on arvud 1 ja 3, kuna 3=1·3, arvu 30 teguriteks on arvud 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, kuna 30=1·30=2·15=3·10=5·6.
- **NB!** Naturaalarv 1 on mistahes naturaalarvu n teguriks, kuna n = 1· n.
- **NB!** Naturaalarvul 1 on täpselt üks tegur – ta ise.
- **NB!** Iga naturaalarv x on naturaalarvu 0 teguriks, kuna 0 = x·0. Seetõttu on arvul 0 lõpmata palju tegureid.

Algarvud ja kordarvud ning arvude astmed

Määratlus 1. **Algarvuks** nimetame sellist naturaalarvu, millel on ***täpselt kaks erinevat tegurit***.

Näide. Algarvuks on $3=1\cdot3$. Algarvuks ei ole 4, kuna $4=1\cdot4=2\cdot2$. **Algarvude tähisteks** on vastavalt $p_0\int 2$, $p_1\int 3$, $p_2\int 5$, …

Määratlus 2. **Kordarvuks** nimetame sellist naturaalarvu, mis **ei ole** 0, **ei ole** 1, **ei ole** algarv.

Näide. Kordarvuks on $6=1\cdot2\cdot3$. Kordarvuks ei ole 5.

Määratlus 3. Mistahes arvu m korral on

- arvu m **nullis aste** m^0 on võrdne arvuga 1,
- arvu m **n+1 aste** m^{n+1} on võrdne korrutisega $m^n \cdot m$.

Näide. 9 on arvu 3 teine aste. 8 on arvu 2 kolmas aste.

Naturaalarvude kanooniline esitus ja aritmeetika põhiteoreem

Määratlus.

- Naturaalarvu k **kanooniliseks esituseks** on $(p_m)^a$, kui $k=(p_m)^a$ või korrutis $(p_m)^a(p_n)^b\ldots(p_r)^c$, kui $k=(p_m)^a(p_n)^b\ldots(p_r)^c$, kus $a, b, \ldots, c$ on positiivsed naturaalarvud ja $0\leq m<n< \ldots<r$ on naturaalarvud.

Aritmeetika põhiteoreem.

Igal naturaalarvul, mis pole 0 ega 1, ***leidub täpselt üks kanooniline esitus.***

Kirjutiste gödeliseerimine

- Olgu, et kirjutised on lõplikud ning jadakujulised.
- Olgu, et kirjutised koosnevad lõplikust hulgast pärit sümbolitest.
- Olgu eelnimetatud sümbolite hulgaks $\{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$
- Olgu $G(s_0)=p_0$, $G(s_1)=p_1$, … , $G(s_m)=p_m$
- Vaatleme kirjutist $k_1k_2\ldots k_i$, kus $k_1, k_2, \ldots, k_i$ on pärit hulgast $\{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$.

Kurt Gödel (1906 – 1978)

Sellisel juhul olgu

$$G(k_1k_2\ldots k_i) = (p_{m+1})^{G(k1)} (p_{m+2})^{G(k2)} \ldots (p_{m+i})^{G(ki)}$$