HULGAD JA ELEMENDID

Osa II

Hulgateooria aksioomid

- Neid fundamentaalseid ehk tõestamist mitte vajavaid printsiipe, mis seostavad hulgateooria fundamentaalseid ehk määratlemist mitte vajavaid mõisteid, nimetame **hulgateooria aksioomideks.** Aksioomide kogumit ennast aga nimetame **aksiomaatikaks.**
- Erinevaid võimalikke aksiomaatikaid on hulgateooria jaoks loodud päris mitmeid. Antud juhul oleme lähtunud sellest, mis on pärit nn **Zermelo-Fraenkeli hulgateooriast** (saksa matemaatiku Ernst Zermelo (1871 –1953) ja iisraeli matemaatiku Abraham Fraenkeli (1891 – 1965) nimede järgi)

Zermelo-Fraenkeli aksioomid

Aksioomid jagunevad järgmisteks gruppideks:

- Väidete grupp, mis on seotud hulkade võrdsusega (2 aksioomi)
- Väidete grupp, mis on seotud hulkade olemasoluga (2 aksioomi)
- Väidete grupp, mis seletab kuidas olemasolevatest hulkadest moodustada uusi (3 aksioomi)
- Väidete grupp, mis on seotud moodustatud hulkade järjestamisega (2 aksioomi)

Hulkade olemasolu ja tühi hulk

- **Olemasolu aksioom:**
  Hulgad on olemas. Eksisteerib vähemalt üks hulk.
  Ehk lühemalt: **$(\exists H)$Set H**

- **ZF Tühja hulga aksioom:**
  Eksisteerib hulk, millel pole mitte ühtegi elementi.
  Selle hulga nimeks on **tühi hulk** ja tähiseks sümbol $\varnothing$
  Ehk lühemalt: **$(\exists H)$(Set H & $H \in \{J | (\forall i)(i \notin J)\}$)**.

Märkus. Tühja hulga aksioom väidab, et tühi hulk on olemas. Tühja hulga aksioomis pole väidetud, mitu (erinevat?) tühja hulka on olemas.

Võrduse seos

- **Määratlus.** $H_1{=}H_2 \int H_1{\subseteq}H_2 \& H_1{\subseteq}H_2$

ZF Ekstensionaalsuse 1. aksioom: Võrdsed hulgad kuuluvad elementidena samadesse hulkadesse ehk lühemalt $H_1{=}H_2 \supset (\forall K)[\, H_1{\in}K \Leftrightarrow H_2{\in}K \,]$

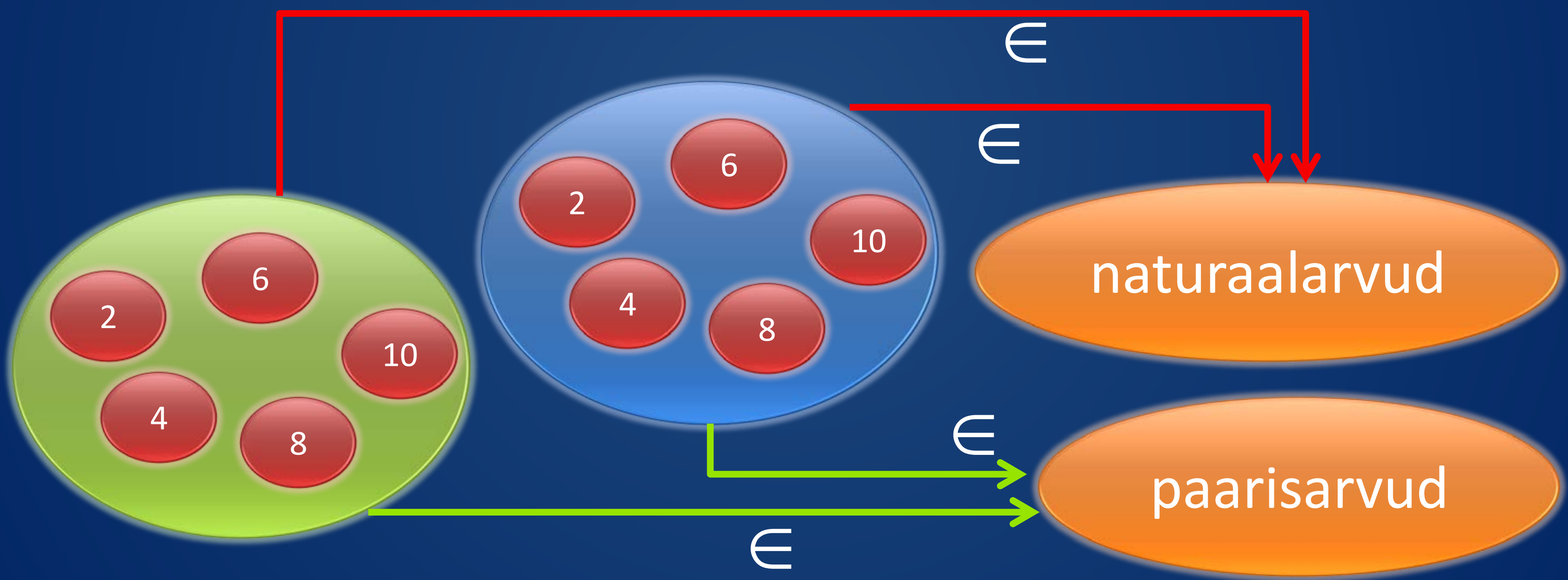
Ekstensionaalsuse 2. aksioom: Hulgad on võrdsed, kui neisse kuuluvad elementidena samad hulgad ehk lühemalt

$$(\forall K)[\, K{\in}H_1 \Leftrightarrow K{\in}H_2 \,] \supset H_1{=}H_2$$

Ekstensionaalsuse 1. aksioomi selgitus

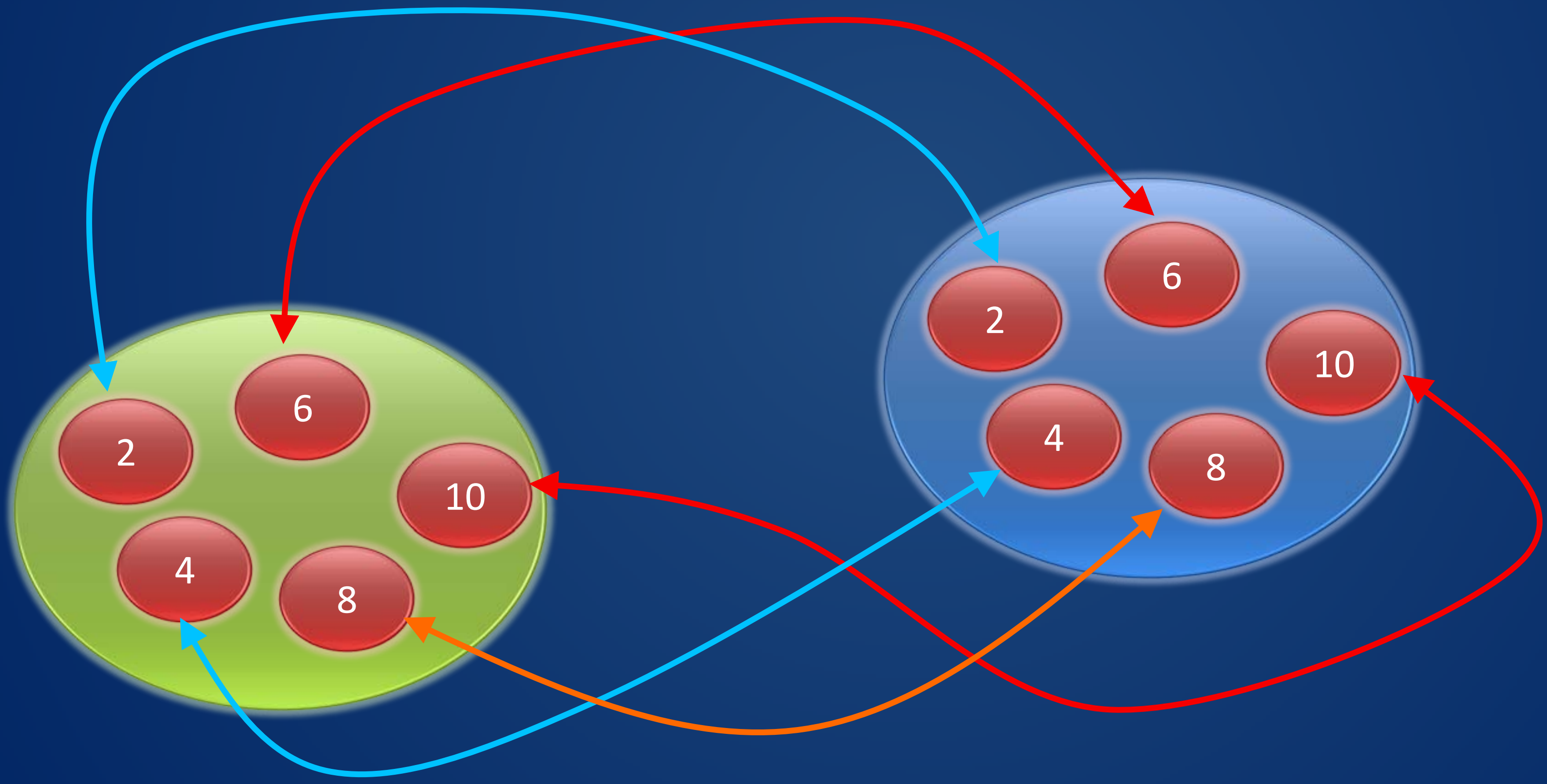
$$H_1 = H_2 \supset (\forall K)[\, H_1 \in K \Leftrightarrow H_2 \in K \,]$$

Kõik, mis kehtib ühe hulga jaoks, kehtib ka teise hulga jaoks.



Ekstensionaalsuse 2. aksioomi selgitus

$$(\forall K)[\,K \in H_1 \Leftrightarrow K \in H_2\,] \supset H_1 = H_2$$



Võrdsete hulkade tähised ja tähendused

Võrdsete samatähenduslikkuse printsiip: $H_1 = H_2 \supset H_1 \int H_2$

Ekstraekvaalsuse printsiip: Kui esimene tähistab teist, siis **leiduvad esimese kui teisega tähistatud hulgad**, mis kuuluvad elementidena alati samadesse hulkadesse ehk lühemalt

$$(A_1 \int A_2) \supset (\exists H_1 H_2)[((A_1 \int H_1) \& (A_2 \int H_2)) \supset (\forall K)[H_1 \in K \Leftrightarrow H_2 \in K]]$$

Intraekvaalsuse printsiip: Kui esimene tähistab teist, siis **leiduvad esimese kui teisega tähistatud hulgad**, kuhu kuuluvad elementidena alati samad hulgad ehk lühemalt

$$(A_1 \int A_2) \supset (\exists H_1 H_2)[((A_1 \int H_1) \& (A_2 \int H_2)) \supset (\forall K)[K \in H_1 \Leftrightarrow K \in H_2]]$$

Võrduse olulisi omadusi

Järeldus 1. Võrduse seos on **refleksiivne** ehk $(\forall X)[X=X]$.

Tõestus. Tuleneb seose $\subseteq$ refleksiivsusest.

Järeldus 2. Võrduse seos on **sümmeetriline** ehk $(\forall XY)[\ X=Y \supset Y=X\ ]$.

Tõestus. Tuleneb ekstensionaalsuse aksioomist.

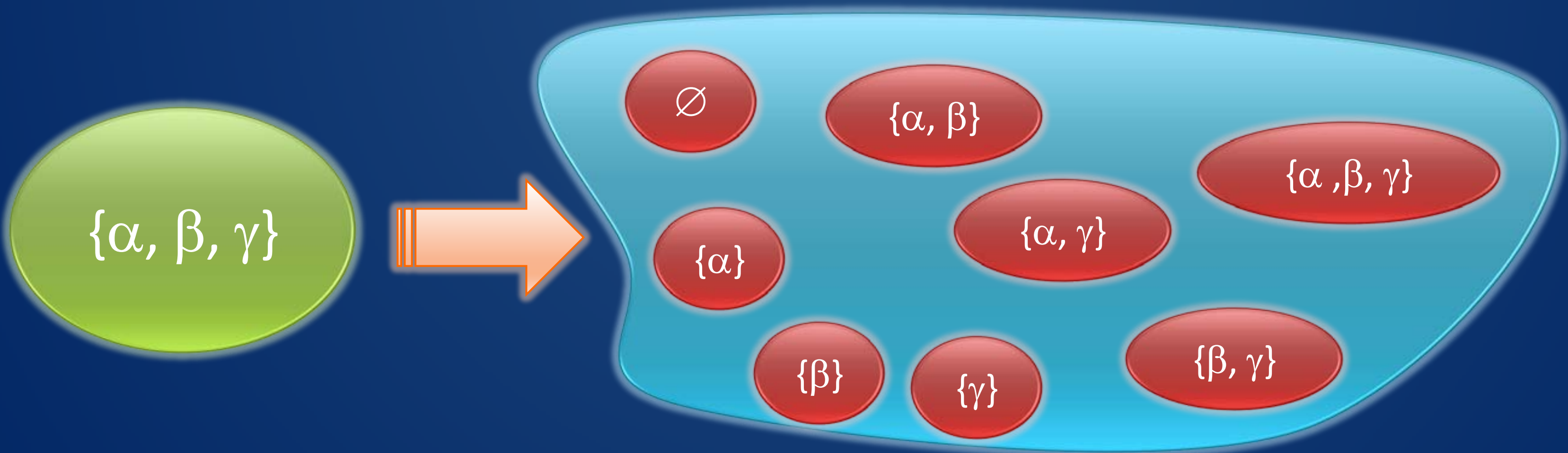
Järeldus 3. Võrduse seos on **transitiivne** ehk $(\forall XYZ)[\ (X=Y \& Y=Z) \supset X=Z\ ]$.

Tõestus. Tuleneb ekstensionaalsuse aksioomist.

Astmehulga aksioom

- **ZF Astmehulga aksioom:** Kui eksisteerib hulk H, siis eksisteerib ka niisugune **hulk, mille elementideks on kõik hulga H osahulgad ja ainult need.** Sellise hulga nimeks on **hulga H astmehulk** ning tähiseks on kirjutis $\mathbf{2^H}$.

Ehk lühemalt: **SetH $\supset$ Set{z|z$\subseteq$H}**



Olulisi järeldusi astmehulga aksioomist

Lemma 1. Iga hulk on iseenda osahulk.

Tõestus. Kui hulgal üleüldse on elemente, siis ainult sellised, mis on tema enda elemendid.

Lemma 2. Tühjal hulgal pole küll elemente, kuid on olemas osahulk – tema ise.

Tõestus. Järeldub lemmast 1.

Teoreem. Tühi hulk on mistahes hulga osahulk.

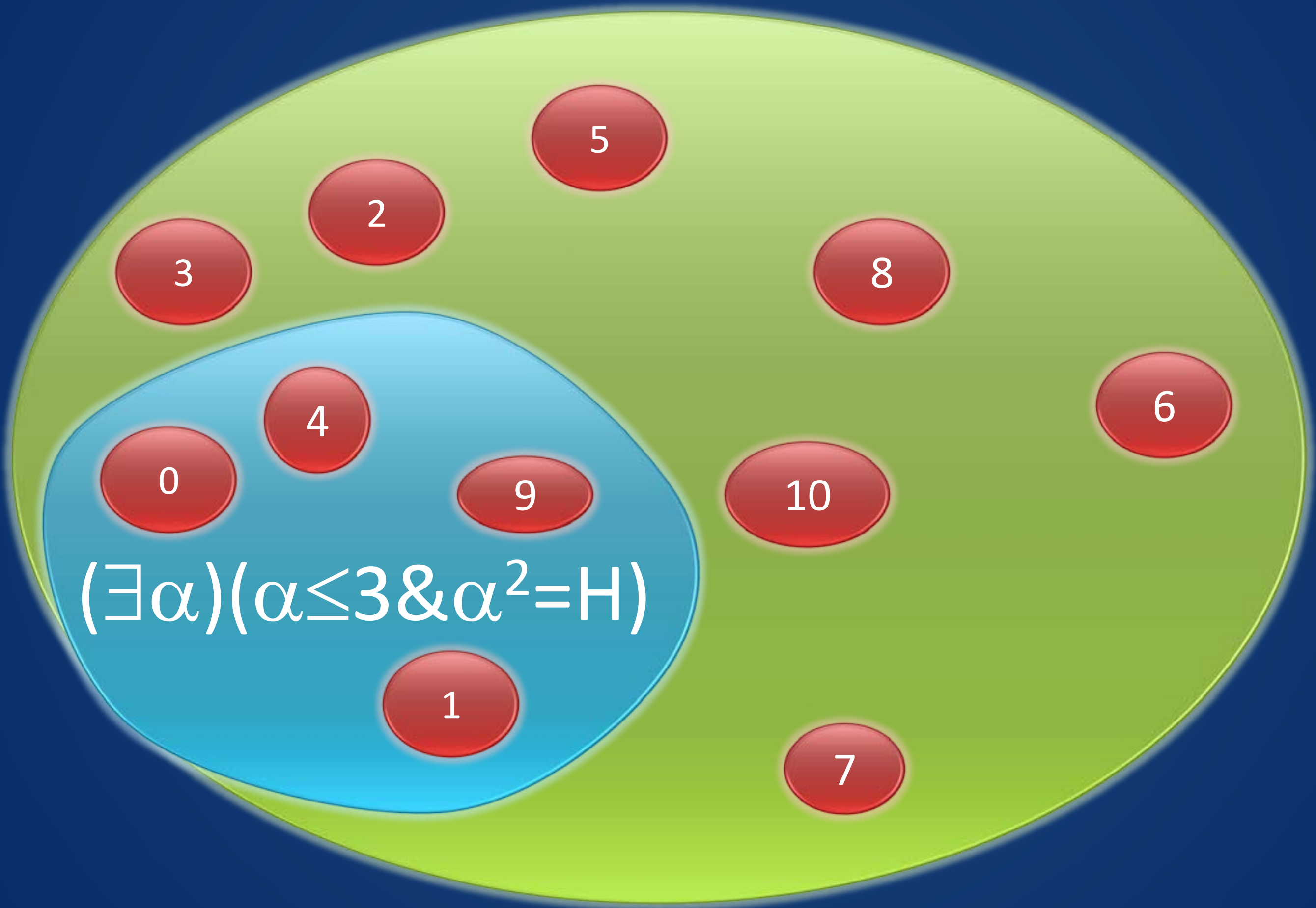
Tõestus. Suvalise **hulga H osahulgaks** iga niisugune hulk, *mille kõik elemendid*, **kui neid üleüldse on**, peavad pärinema hulgast H. Tühjal hulgal elemente pole. Järelikult on tühja hulga korral tegemist hulga H osahulgaga.

- **Oluline järeldus. Ükski astmehulk pole tühi. Isegi $2^{\varnothing}$!**

Osahulga väljaeraldamine. Väljaeraldamise aksioom.

- **ZF Väljaeraldamise aksioom:** Kui eksisteerib hulk tähisega M ja W(H) on ***hulgateooria valem***, milles esineb mingi hulga tähis H, siis eksisteerib niisugune **hulk, mille elementideks on kõik sellised hulga M elemendid H (ja ainult need!), mille korral W(H).** Sellise hulga nimeks on **tingimust W rahuldavate hulga M elementide hulk** ning selle tähiseks on kirjutis $\{H \mid H \in M \ \& \ W(H)\}$
- **Märkus.** Konjunktsioonis $H \in M \ \& \ W(H)$ on esimese liikme $H \in M$ roll oluline selleks, et $\{H \mid H \in M \ \& \ W(H)\}$ oleks üleüldse hulk!

ZF Väljaeraldamise aksioom. Selgitus



Russelli paradoks

- Vaatleme **hulka K**, mille elementideks on kõik sellised hulgad, mille tähiseks on $\{ H \mid H \notin H \}$. Paneme tähele, et $H \notin H$ **on hulgateooria valem**, kui H on hulga tähis.
  Nüüd on kaks võimalust: $K \in K$ või $K \notin K$.
  Kui $K \in K$, siis K on üks nendest, mis iseenda elemendiks pole – st $K \notin K$.

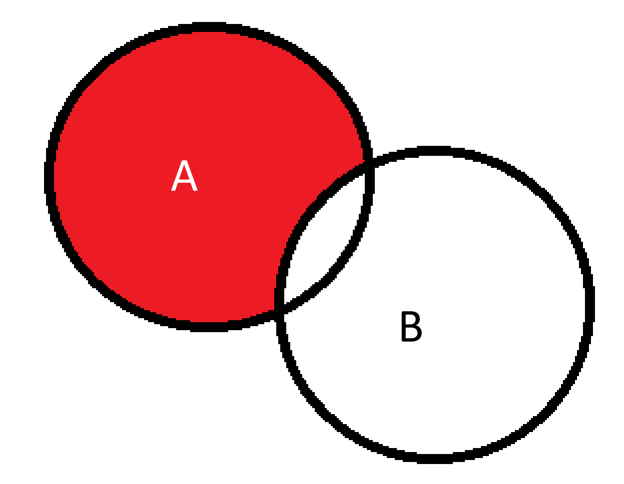
Kui $K \notin K$, siis K on üks nendest, mis kuulub elemendina hulka K – st $K \in K$.

Paradoks tekkis sellest, et hulkade kirjeldamiseks kasutasime nõutava määratluse $\{ H \mid H \in M \ \& \ W(H) \}$ asemel lubamatut lihtsustust $\{ H \mid W(H) \}$

Bertrand Russell
(1872– 1970)

Hulgast väljaeraldamine: hulkade vahe

Määratlus. Hulkade A ning B **vahe** moodustavad kõik need hulgad, mis on hulga A elementideks, kuid pole hulga B elementideks. Hulkade A ning B vahe tähiseks on kirjutis **A – B**.



Teoreem. Hulkade A ning B vahe on hulk.
Tõestus. Määratluse kohaselt on hulkade A ning B vaheks hulk $\{ y \mid y \in A \ \& \ y \notin B \}$. Väljaeraldamise aksioomi kohaselt on tegemist hulgaga (kuna A on hulk ja $y \notin B$ on hulgateooria valem).

Ühe elemendiga hulgad

- **Üksiku aksioom:**
  Kui eksisteerib hulk, mille tähiseks on H, **siis** eksisteerib **hulk, mille ainsaks elemendiks on H.**
  Selle hulga nimeks on **hulgast H koosnev üksik** ja tähiseks on kirjutis **{H}**

  Ehk sümbolite abil kirja pannes:
  $\mathrm{Set}H \supset [\ \mathrm{Set}\{H\}\ \&\ (\forall J)(J \in \{H\} \supset J = H)\ ]$
  Märkus. $J=H \int (\forall x)[\ x \in J \Leftrightarrow x \in H\ ]$

  Järeldus. Leidub hulk, mille ainsaks elemendiks on tühi hulk. Ehk lühemalt – $\mathrm{Set}\{\varnothing\}$

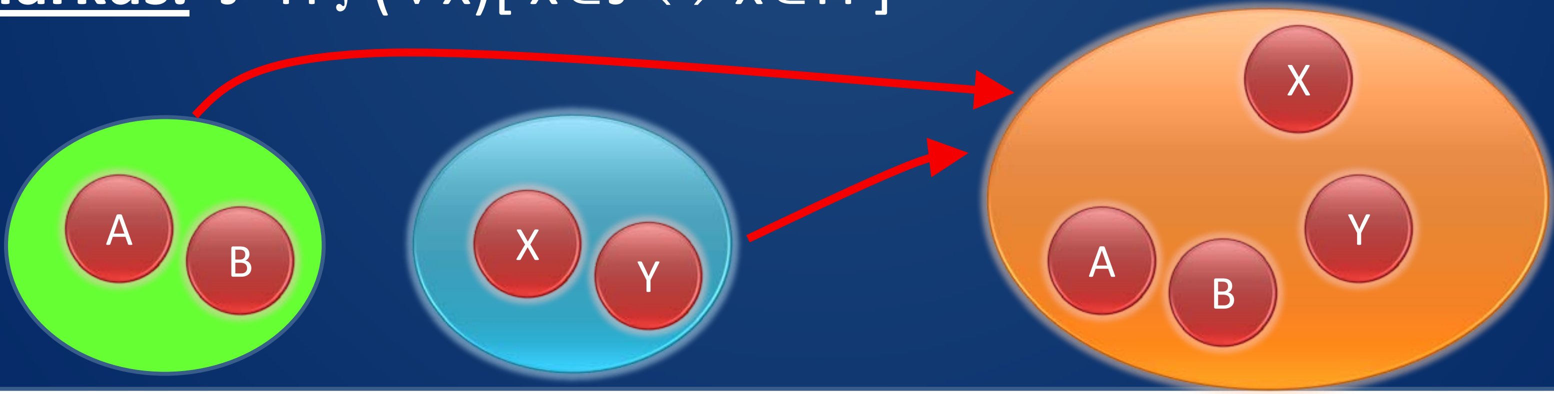
Kahe elemendiga hulgad

- **ZF Paari aksioom:** Kui eksisteerivad hulgad, mille tähiseks on H_1 ning H_2, siis eksisteerib **hulk, mille ainsateks elementideks on hulgad H_1 ning H_2.** Selle hulga nimeks on **hulkadest H_1 ning H_2 koosnev paar** ja tähiseks on kirjutis **$\{H_1, H_2\}$**

  Ehk sümbolite abil kirja pannes:

  $$(SetH_1 \& SetH_2) \supset [Set\{H_1,H_2\} \& (\forall J)(J \in \{H_1,H_2\} \supset (J=H_1 \vee J=H_2))]$$

  Märkus. $J=H \int (\forall x)[\ x \in J \Leftrightarrow x \in H\ ]$



Elementideks olemise regulaarsus

- **ZF Regulaarsuse aksioom:** Kui hulk pole tühi, siis peab tal leiduma vähemalt üks niisugune element, millega tal omakorda pole ühiseid elemente. Ehk lühemalt:

  $(\mathrm{Set}H \ \& \ H \neq \emptyset) \supset (\exists y)(y \in H \ \& \ \neg(\exists x)(x \in y \ \& \ x \in H))$

  Teoreem. **Ükski hulk ei saa olla iseenese elemendiks**

  Tõestus. Kui oletaksime, et hulk H on iseenda elemendiks, siis – moodustades uue hulga {H} , mille ainsaks elemendiks on H – näeme, et hulgal {H} on oma iga elemendiga (neid aga pole ju rohkem, kui H) ühine element. See aga on vastuolus regulaarsuse aksioomiga. Järelikult ei saa meie oletus olla õige.

Teineteise elemendiks olemisest

Teoreem. **Pole olemas hulkasid A ning B, mille korral on õige, et $A \in B$ ja ühtlasi on õige, et $B \in A$.**

Tõestus. Tõepoolest – vastupidisel juhul (st ***kui oletame***, et siiski leiduvad hulgad A ja B, mille korral $A \in B$ ja $B \in A$), saame ***paari aksioomi*** rakendades moodustada hulga H, mille ainsateks elementideks on hulgad A ja B. Sellisel juhul oleks hulkade H ning A ühiseks elemendiks B ja teisest küljest oleks hulkade H ja B ühiseks elemendiks A. ***Regulaarsuse aksioomi*** põhjal aga peaks igal hulgal – järelikult ka hulgal H leiduma vähemalt üks niisugune element z, mis ei oma hulgaga H ühiseid elemente. Samas aga näeme, et äsja moodustatud hulgas H selliseid elemente pole. Seega – meie oletus ei pea paika ning selliseid hulkasid A ja B, mille korral $A \in B$ ja $B \in A$ pole olemas.

Süvaelemendid

- **Määratlus.**
- Mittetühja hulga kõik elemendid on ühtlasi selle hulga **süvaelemendid**
- Kui A on mittetühja hulga H süvaelement ja seejuures $B \in A$, siis ütleme, et hulk B on hulga H **süvaelement**
- Kui B on mittetühja hulga H süvaelement, kusjuures samas $B \notin H$, siis nimetame hulka B hulga H **tõeliseks süvaelemendiks**
- **Näide.** Vaatleme hulka $\{ \emptyset, \{\{\emptyset\}\} \}$. Selle üheks süvaelemendiks on $\emptyset$, mis pole samas tõeliseks süvaelemendiks. Küll on aga tõeliseks süvaelemendiks $\{\emptyset\}$.

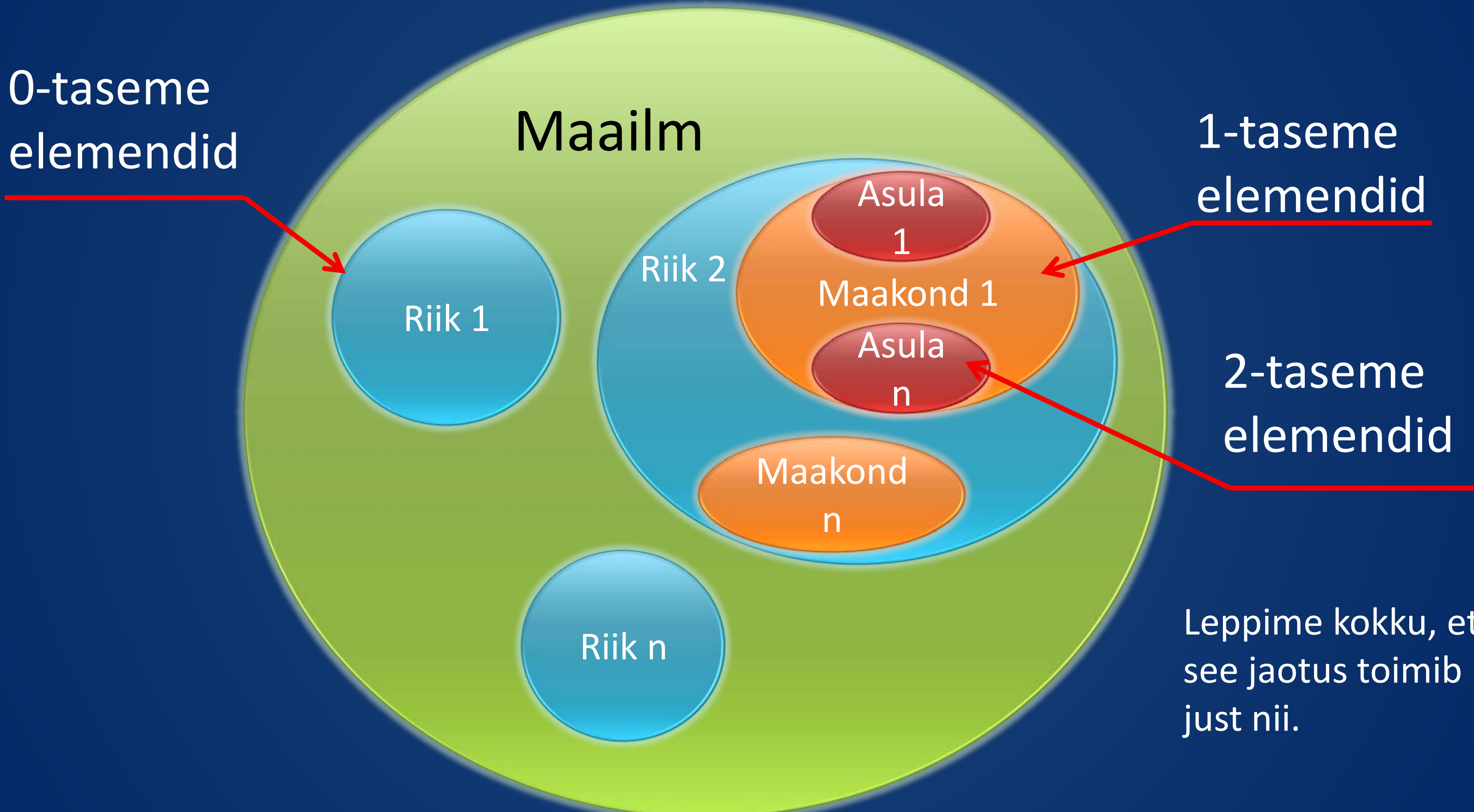
Süvaelementide tasemed

- Vahel (näiteks nn täiesti lõplike hulkade korral, kus elemente on lõplik arv, elementide elemente on lõplik arv, elementide elementide elemente on lõplik arv jne) on oluline teada, kui "sügaval" mingi süvaelement paikneb.

Määratlus.

- Mittetühja hulga kõik elemendid on ühtlasi selle hulga **0-taseme süvaelemendid**
- Kui A on mittetühja hulga H m-taseme süvaelement ja seejuures $B \in A$, siis ütleme, et hulk B on hulga H **m+1-taseme süvaelemendiks**
- **Märkus.** Mõnes hulgas võib mõni süvaelement omada korraga mitut erinevat taset. Näiteks omab süvaelement B hulgas { {B}, {C, {B}} } korraga taset 0+1 ja taset 0+1+1.

Süvaelemendid. Selgitus



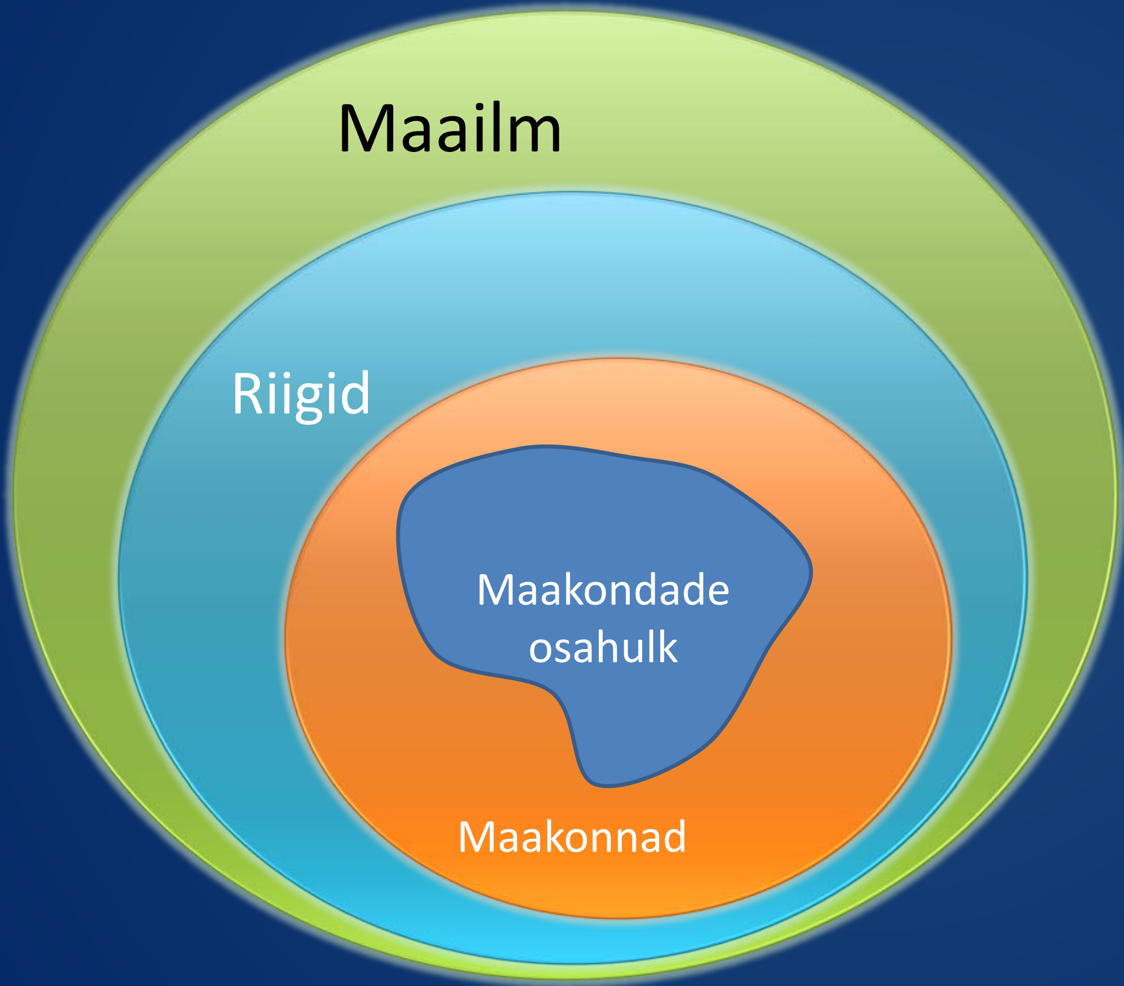
Leppime kokku, et see jaotus toimib just nii.

Süvahulgad

Määratlus. Vaatleme mittetühja hulka H.

- Hulka A nimetame **hulga H süva-osahulgaks** ehk lühemalt **süvahulgaks**, **kui** selle elementideks võivad olla **ainult hulga H süvaelemendid**
- Kui seejuures on teada süvaelementide tasemed ja A **sisaldab** vähemalt ühte hulga H **m-taseme** süvaelementi, kuid samas **ei sisalda** mitte ühtegi **m+n+1-taseme** süvaelementi, kus $0 \leq n$, siis ütleme, et A on **hulga H m-taseme süvahulk.**
- **Kokkuleppeliselt olgu tühi hulk $\varnothing$ mistahes hulga 0-taseme süvahulgaks**

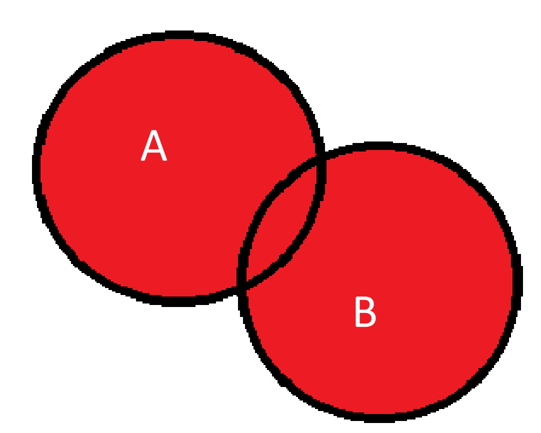
Süvahulgad. Selgitus



Maakondade osahulk on Riikide hulga 0-taseme süvaosahulk, samuti maailma hulga 1-taseme süvaosahulk

Ühendhulgad

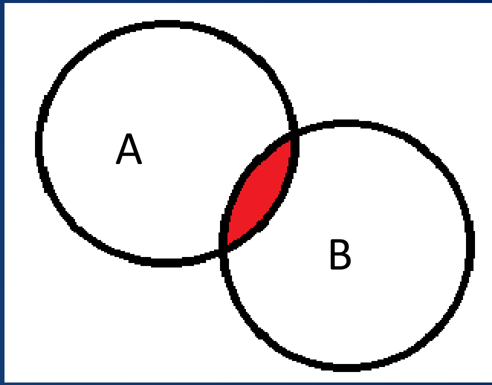
- **ZF Ühendhulga aksioom:** Iga hulga H korral eksisteerib niisugune **hulk, mille elementideks on kõik hulga H elementide elemendid ja ainult need.** Sellise hulga nimeks on **hulga H elementide ühendhulk** ja tähiseks on kirjutis $\cup$**H**



Kui seejuures osutub, et hulga H näol on tegemist hulkadest H_1 ning H_2 koosnev paariga $\{H_1,H_2\}$, siis kasutatakse tähise $\cup\{H_1,H_2\}$ asemel tähist $H_1 \cup H_2$

Näide. Vaatleme hulka {{Δ,O},{#,♣,♦},{O,♣}}.
Selle ühendiks ∪{{Δ,O},{#,♣,♦},{O,♣}} on hulk {Δ,O,#,♣,♦}

Ühendhulgast väljaeraldamine: hulkade ühisosa



Määratlus. Hulkade A ning B **ühisosaks** nimetame hulka, mille elementideks on nii hulka A, kui samas ka hulka B kuuluvad elemendid. Hulkade A ning B ühisosa tähistatakse kirjutisega $\mathbf{A \cap B}$.

Teoreem. Hulkade ühisosa on hulk.

Tõestus. Määratluse kohaselt on hulkade A ning B ühisosaks $\{ z \mid z \in A \ \& \ z \in B \}$. Pole raske veenduda, et esiteks

$(z \in A \ \& \ z \in B) \Leftrightarrow ((z \in A \vee z \in B) \ \& \ (z \in A \ \& \ z \in B))$ ja teiseks

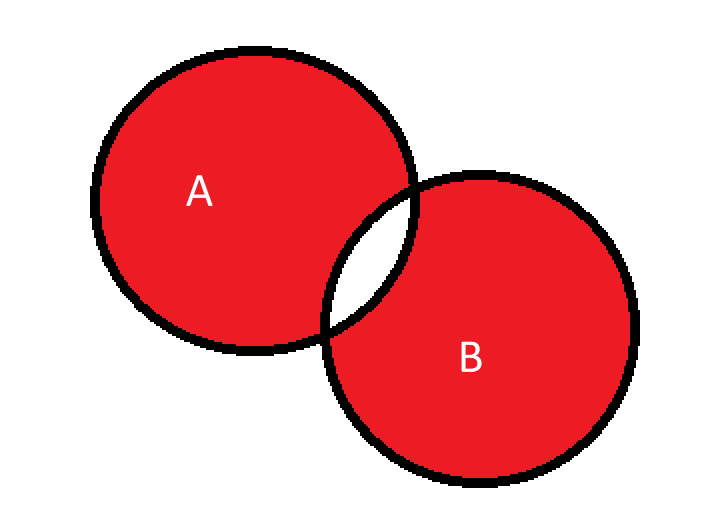
$(z \in A \vee z \in B) \Leftrightarrow z \in A \cup B$. Järelikult

$(z \in A \ \& \ z \in B) \Leftrightarrow ((z \in A \cup B) \ \& \ (z \in A \ \& \ z \in B))$.

Kuna $A \cup B$ on hulk ühisosa aksioomi põhjal ning $z \in A \ \& \ z \in B$ on hulgateooria valem, siis väljaeraldamise aksioomi põhjal on hulgaks ka $\{z \mid (z \in A \cup B) \& (z \in A \text{ja} z \in B)\}$ ehk hulk $\{z \mid z \in A \& z \in B\}$.

Ühendhulgast väljaeraldamine: hulkade erisosa

Määratlus. Hulkade A ning B **erisosaks** ehk hulkasid A ning B **eristavaks osaks** ehk hullkade A ning B **sümmeetriliseks vaheks** nimetame hulka, mille elementideks on hulka A või hulka B, kuid mitte mõlemasse üheaegselt kuuluvad elemendid. Hulkade A ning B erisosa tähistatakse kirjutisega **$A\Delta B$**.



Teoreem. Hulkade erisosa on hulk.

Tõestus. Määratluse kohaselt on hulkade A ning B erisosaks $\{ z \mid z\in A\cup B \ \& \ z\notin A\cap B \}$. Ühendi aksioomi kohaselt $A\cup B$ on hulk ning eelmise teoreemi põhjal on hulgaks ka $A\cap B$. Niisugusel juhul on $z\notin A\cap B$ hulgateooria valem. Järelikult $\{ z \mid z\in A\cup B \ \& \ z\notin A\cap B \}$ ehk $A\Delta B$ on hulk.

Valikhulgad

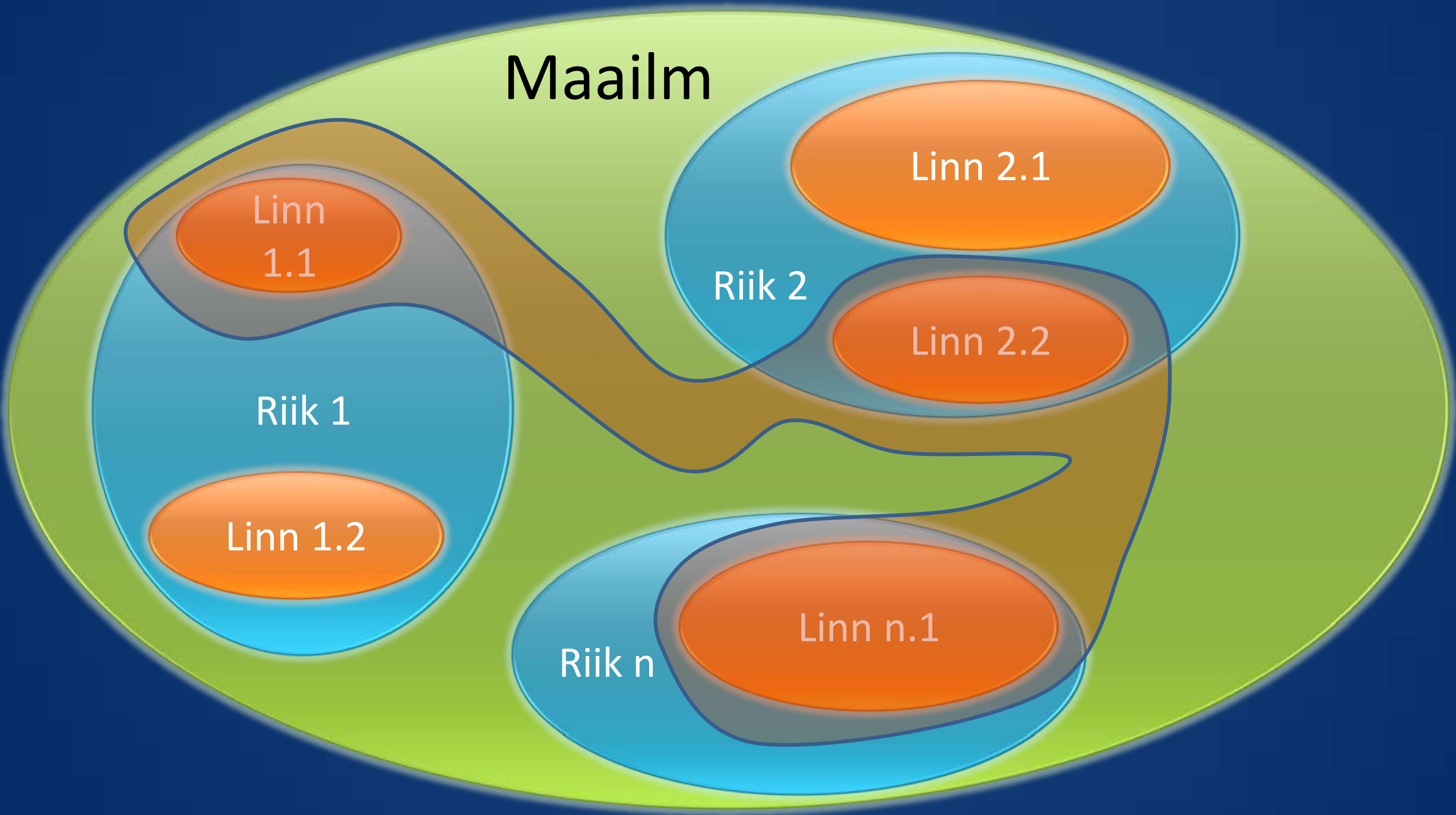
- **ZF + C Valiku aksioom:** Iga ainult mittetühjadest elementidest koosneva hulga H korral eksisteerib niisugune hulk, mille elementideks on hulga H **elementide elemendid, seejuures igast elemendist täpselt üks välja valitud (mingi elemendi!) element ja ainult need.** Sellise hulga nimeks on **hulga H elementide (mingite elementide) valikhulk.**

Näide. Vaatleme hulka **{{Δ,O},{#,♣,♦},{O,♣}}.**

Selle üheks valikhulgaks on hulk **{Δ,#,O}.**
Teiseks valikhulgaks on aga näiteks **{O,♦,♣}.**

Märkus. Valikuaksioom on vajalik hulkade olemasolu ***selliseks tõestamiseks***, kus tuleb teostada n-ö *elementide väljavalimisi*. Ühekaupa etteantud hulkade seast (mis ise pärit hulgast H).

Valiku aksioom. Selgitus



ZF Lõpmatuse aksioom

- **Lõpmatuse aksioom:**
  Eksisteerib vähemalt üks niisugune hulk L, mille korral selle hulga L üheks elemendiks on tühi hulk ∅
- **kui vaadeldavasse hulka L kuulub elemendina mingi hulk H, siis kuulub hulka L elemendina ka hulk, mille tähiseks on H+1 ja mille (st H+1) elementideks on ainult kõik hulga H elemendid, kui H pole tühi ja hulk H ise**
- **Näide. Kui hulk H on tühi, siis hulgaks H+1 on {∅}. Kui hulga H elementideks on x,y,z, siis hulga H+1 elementideks on x,y,z ja {x,y,z}.**
- **Märkus.** Antud aksioom ***ei ole*** lõpmatuse määratlus!