HULGAD JA ELEMENDID

Osa I

Fundamentaalsed probleemid

- **Kuulumise probleem.** Kas asi, mida tähistab A, kuulub kogumisse, mida tähistab K
- **Moodustamise probleem.** Kuidas moodustada kogumit, mille tähiseks on K
- **Kirjeldamise probleem.** Kuidas kirjeldada kogumeid, nende kuulumist ja moodustamist – seda, mis kuulub ja millesse kuulub, samuti seda, mida moodustatakse, millest moodustatakse ja kuidas moodustatakse

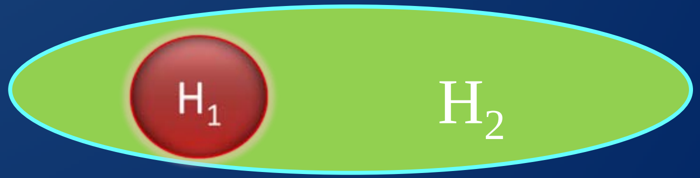
Fundamentaalmõisted

- **Hulk** ▪ **Hulgaks olemine**

Hulgaks olemist väljendab ühekohaline ehk unaarne predikaat, mille tähiseks olgu **Set** . Siinkohal lepime kokku, et kirjutame
Set H ∫ H on hulk ehk pisut pikemalt
Set H ∫ see, mida tähistab H, on hulk

- Hulkade vaheline binaarne *tähiseks-tähenduseks olemise seos*
- Hulkade vaheline binaarne seos *elemendiks olemise seos* ning *võrdseks olemise seos*
- Lepime kokku, et: $\in$ ∫ ***elemendiks olemise seos***
- Kui oleme valinud kahele hulgale tähisteks vastavalt sümbolid H_1 ning H_2, siis lepime kokku, et:

$H_1 \in H_2$ ∫ H_1 on H_2 element



Hulga elemendid

- Objektid, mis moodustavad hulga, on hulga elemendid
- Samas on kokku lepitud, et kui miski on hulga element, siis seda “miskit” loetakse ka hulgaks.
- Järelikult, kui hulgal on elemente, siis kõik need elemendid on samuti hulgad. Olemata sellest, kas soovime neid samal ajal nimetada objektideks või asjadeks või olemiteks vms
- Hulga elemendid on omavahel eristatavad ja iga elemendi korral peab olema võimalik otsustada kas see või teine asi kuulub elemendina antud hulka või mitte
- Hulk ei ole seesama, mis tema element

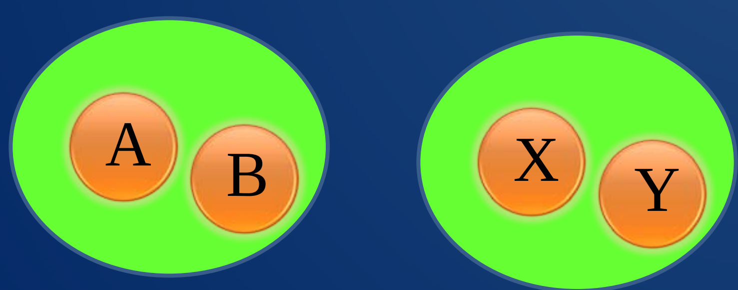
Elemendiks olemise seos, hulgad, klassid

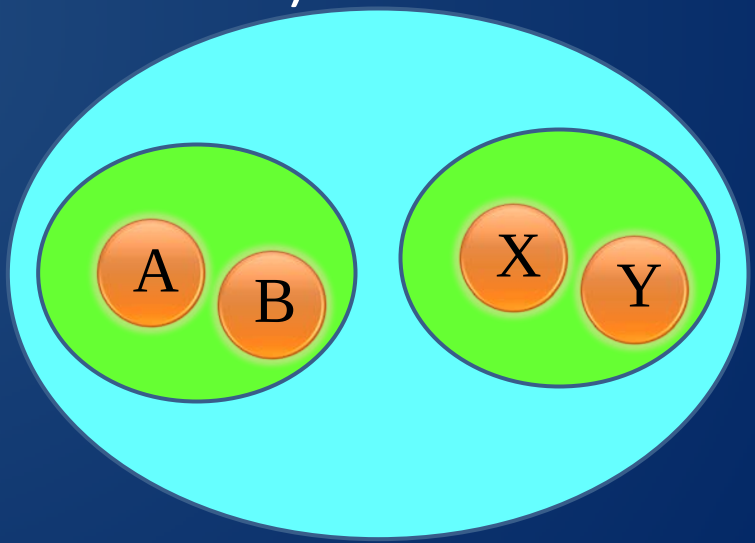
- Seos on binaarne
- Iga hulk on mingi teise hulga elemendiks
- Ei ole õige, et igal hulgal eksisteerivad elemendid (eksisteerib *tühi hulk* $\emptyset$)
- Pole olemas kõikide hulkade hulka
- Lisaks hulkadele kõneldakse sageli klassidest. Klasside elementidena võivad esineda ka hulgad. Klassi, mille elementideks on ***kõik*** võimalikud hulgad (ja ei midagi enamat), nimetatakse *universaalseks klassiks*.

Elemendiks olemise seose aksioomid

- Tühja hulka olemasolu aksioom
- Üksiku aksioom (suvalise hulga korral leidub hulk, mille ainsaks elemendiks on just see hulk)
- Paari aksioom (*suvalise kahe hulga korral leidub hulk, mille elementideks on parajasti just need kaks hulka*)

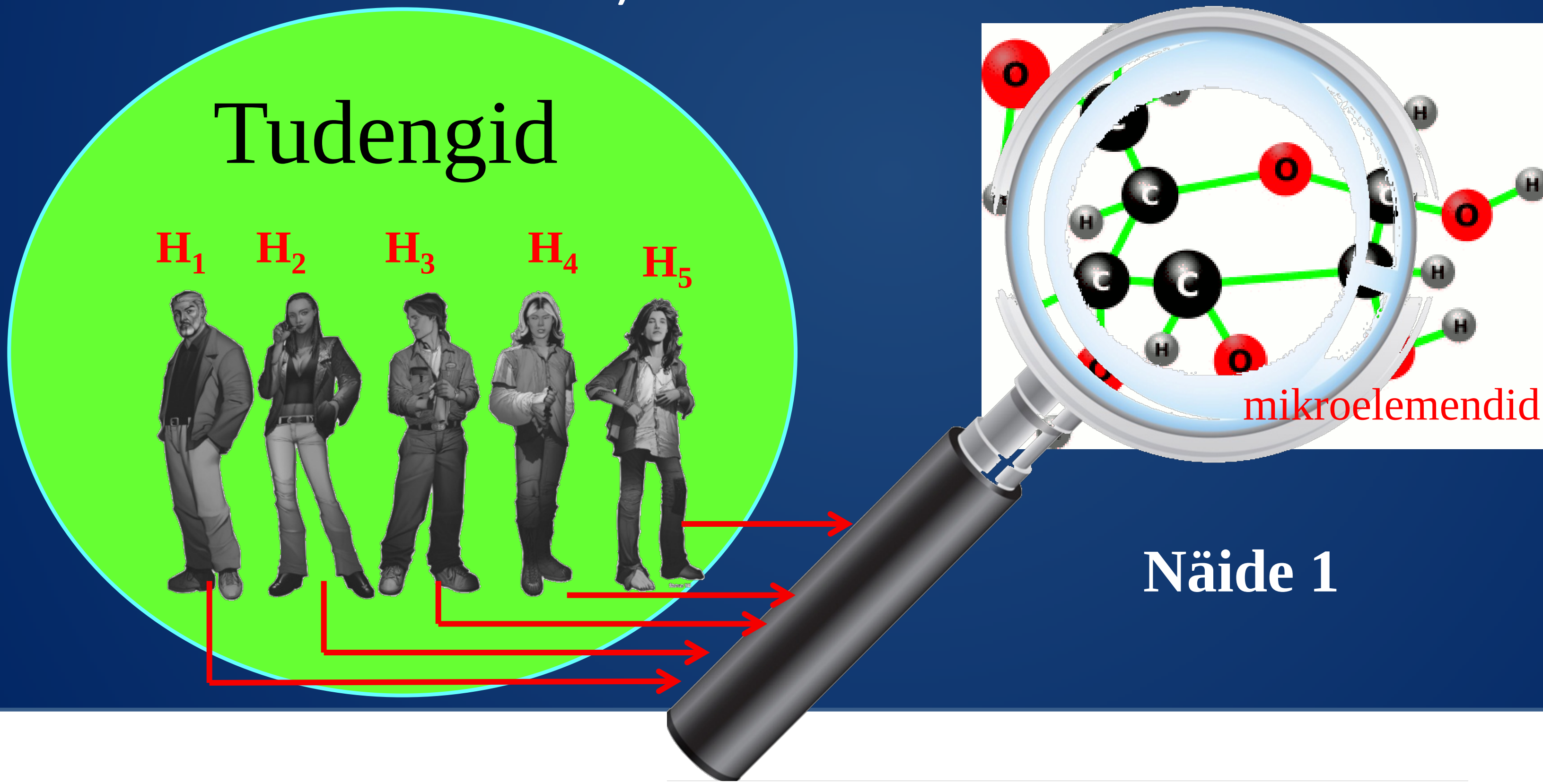
$\{A, B\}, \{X, Y\}, \{\{A, B\}, \{X, Y\}\}$





Elemendiks olemise seose aksioomid (jätk)

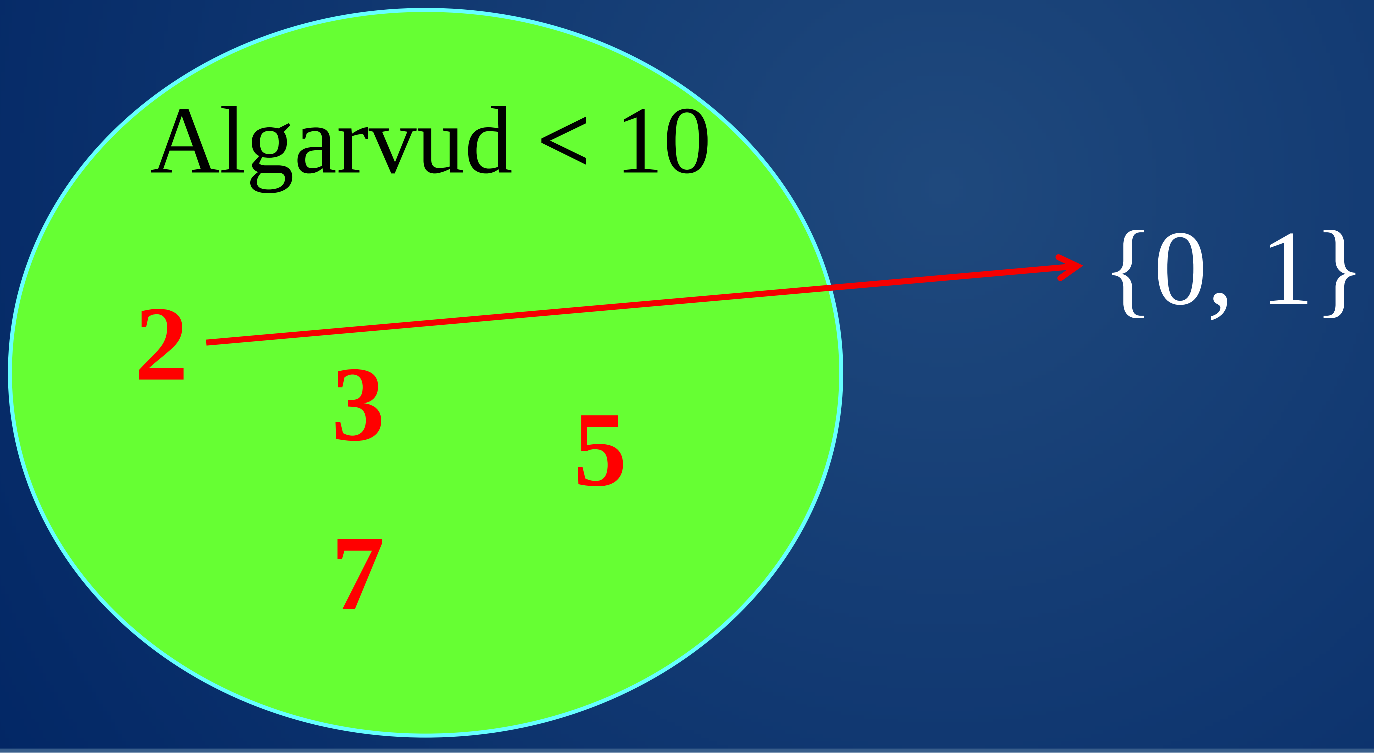
- Regulaarsuse aksioom (*Suvalises mittetühjas hulgas X peab leiduma selline element Z nii, et X ja Z ei oma üldse ühiseid elemente*)



Näide 1

Elemendiks olemise seose aksioomid (jätk)

- Regulaarsuse aksioom. Näide 2:



Elemendiks olemise seose omadused

- Mitte ükski hulk ei saa olla iseenda elemendiks $\neg(\exists H)(H \in H)$ ($\in$ on mitterefleksiivne)

Näide:
Inimene ei ole iseenda elemendiks. Inimese elementideks on näiteks rakud. Samas aga inimene saab olla ise elemendiks näiteks inimeste grupis.

Elemendiks olemise seose omadused (jätk)

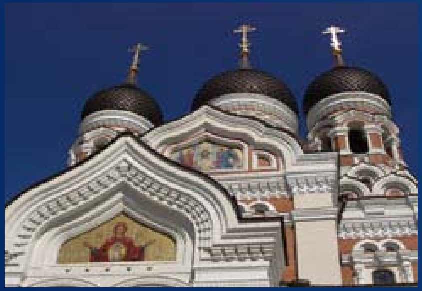
- Selgitus mitterefleksiivsusele:

  Oletame vastupidist: Olgu hulk X ise enda elemendiks. Nüüd moodustame hulgast X üksiku, st hulga Z={X}. Näeme, et hulkadel X ja Z on ühine element X (kuna oletuse kohaselt $X \in X$, samas $X \in Z$, kuna Z={X}). Samas pole hulgas Z muid elemente peale X. Seega pole ka elemente, millega omakorda pole ühiseid elemente. Nüüd aga tekkis vastuolu regulaarsuse aksioomiga. Järelikult – meie oletus osutus vääraks.

Elemendiks olemise seose omadused (jätk)

- Seos *ei ole sümmeetriline*, ehk ei saa olla õige, et $X \in Y$ ja samal ajal $Y \in X$. Esitame valemina: $\neg(\forall XY)(X \in Y \supset Y \in X)$

Näide:



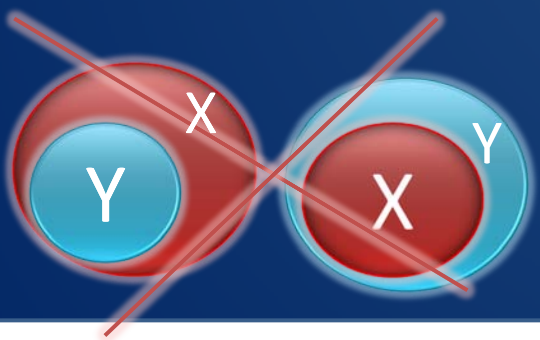
$\in$

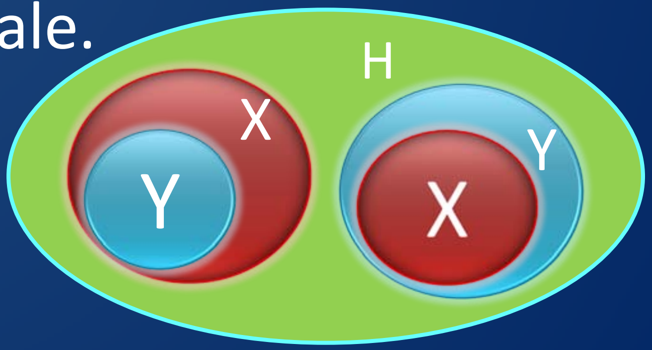
$\cancel{\in}$

Elemendiks olemise seose omadused (jätk)

- Selgitus mittesümmeetrilisusele:

  Kui oletada, et leiduvad sellise X ja Y, mille korral on $X \in Y$ ja samal ajal $Y \in X$, siis saame paari aksioomi abil moodustada paari {X, Y}. Nimetame paari hulgaks H. Sellisel juhul oleks hulkadel H ja X üheseks elemendiks Y ja samuti hulkadel H ja Y ühiseks elemendiks X. Regulaarsuse aksioomi järgi peaks hulgas H leiduma vähemalt üks element, mis ei oma hulgaga H ühiseid elemente. Meie oletus on vale.





Elemendiks olemise seose omadused (jätk)

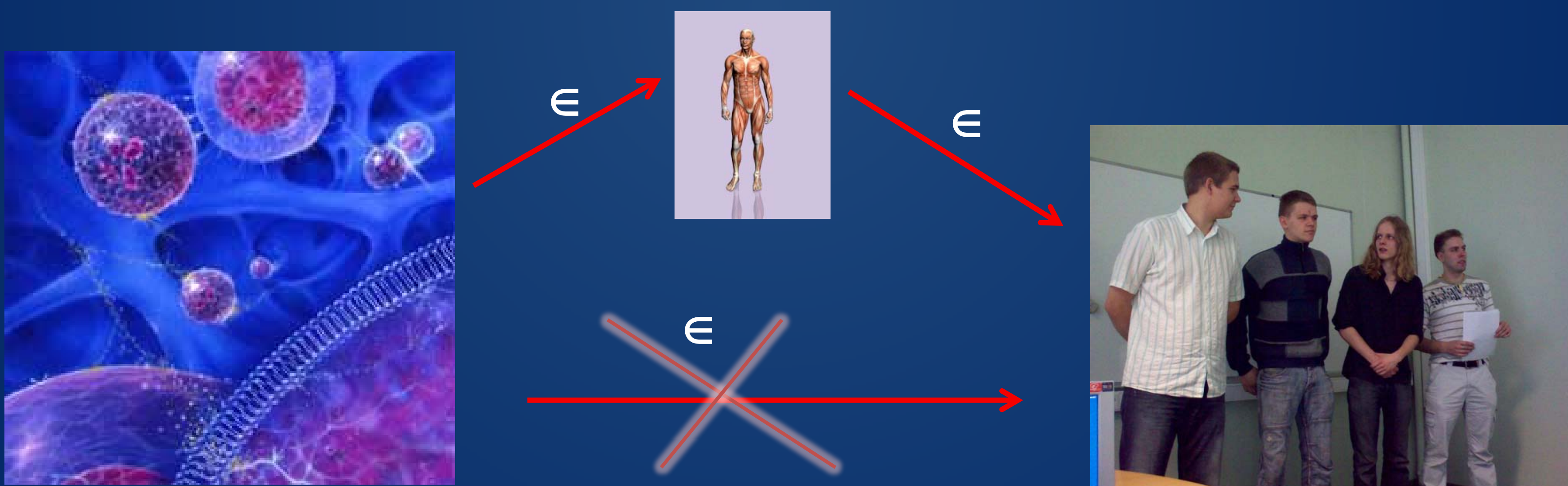
Seos ei ole transitiivne, ehk sellest et X∈Y ja Y∈Z ei järeldu alati et X∈Z

Olgu X inimese mao rakkude hulk.

Y – inimene, kes on paljude erinevate rakkude hulk (mitte ainult mao rakkude)

Z – on informaatika eriala tudengite rühm

Vaevalt mõne üliõpilase mao rakkude hulk kuulub tudengite rühma.



Hulgateooria valemid

- Selleks, et kirja panna hulkade kohta käivaid väiteid, kasutame rangelt kokku lepitud kirjutisi, mida kutsume ***hulgateooria valemid***
- **Set H on valem, mis väljendab hulgaks olemist, mis võib olla õige või mitte. Olenevalt sellest, kas H on või pole hulk.** Seega on tegemist n-ö hulgateooria ülese teooria ehk hulkade metateooria valemiga. "Metavalemi seisus" on ka kirjutistel **A∫B**
- $H_1 \in H_2$ **on hulgateooria valem**, kui H_1, H_2 on hulkade tähised
- $\neg W$ **on hulgateooria valem**, kui **W** on hulgateooria valem.
  Kokkulepe: $H_1 \notin H_2 \int \neg(H_1 \in H_2)$
- **W&M, W∨M, W⊃M, W⇔M on hulgateooria valemid**, kui **W** ning **M** on hulgateoori valemid
- **(∀H)W, (∃H)W on hulgateooria valemid,** kui **W** on hulgateooria valem, milles sisaldub hulga tähis **H**, kuid mis ***ei sisalda*** kirjutisi **∀H** ega **∃H**

Valemite kirjutamise lisakokkulepped

- Kui W on valem, siis (W), [W], …ehk “valem sulgudes” on samuti valem
- Kui $(\forall z)W$ on valem, siis $\forall zW$ on valem
- Kui $(\exists z)W$ on valem, siis $\exists zW$ on valem
- Kui $(\forall x)(\forall z)W$ on valem, siis $(\forall xz)W$ ja $\forall xzW$ on valemid
- Kui $(\exists x)(\exists z)W$ on valem, siis $(\exists xz)W$ ja $\exists xzW$ on valemid

Veel mõned kokkulepped

- Kui T tähistab mingit tingimust ja T(x) tähistab seda, et *asi, mille tähiseks on x rahuldab tingimust, mille tähiseks on T*, siis

{ x | T(x) } tähistab *kõikide selliste asjade kogumit, mis rahuldavad tingimust T*.

<u>Näide.</u> { H | Set H } $\int$ *kõikide hulkade kogum*

<u>Märkus.</u> Edaspidi eeldatakse sageli n-ö vaikimisi, et T näol on tegemist hulgateooria valemiga ning et x näol on tegu hulga tähisega

<u>Näide.</u> $\{J|(\forall i)(i \notin J)\}$ $\int$ *kõikide "tühjade" hulkade kogum*

Hulgateooria valemite juures on oluline:

- Igale ”vasakpoolsele” ehk “algavale” sulule peab vaadeldavas kirjutises leiduma ka just sellele sulule vastav “parempoolne” ehk “lõppev” sulg ning vastupidi.

Näited:

Kirjutis $[(A=B\supset B=A]$ ei ole hulgateooria valem

Kirjutis $(W\&M)\vee((P\&Q)\Leftrightarrow(M\&Q)$ ei ole hulgateooria valem

Hulgateooria valemite juures on oluline (jätk):

- Sümbol $\neg$ peab alati paiknema mingi valemi ees
- Sümbolid &, $\vee$, $\supset$ ja $\Leftrightarrow$ peavad alati paiknema kahe valemi vahel
- $\forall$ ning $\exists$ järel peavad alati paiknema mingite hulkade tähised ja siis kohe valemid

Näited:

Kirjutis $(\forall\alpha)(\alpha\neg\in\emptyset)$ ei ole hulgateooria valem

Kirjutis &(A=B) ei ole hulgateooria valem

Kirjutis $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\exists\gamma)(\alpha \supset \beta \mathbin{\&} \beta \supset \alpha)$ ei ole hulgateooria valem

Hulgateooria valemite tõeväärtused

- Hulgateooria valemeid nimetame
  - *Täiesti õigeteks*, kui nende tõeväärtus on õige, olemata käsitlevatest hulkadest
  - *Osaliselt õigeteks* (ehk *kehtestatavateks*), kui nende tõeväärtus oleneb seal käsitletavate hulkade valikust ja seejuures leidub vähemalt üks valik, mille korral vaadeldav tõeväärtus on õige
  - *Osaliselt valedeks* (ehk *vääratavateks*), kui nende tõeväärtus oleneb seal käsitlevate hulkade valikust ja seejuures leidub vähemalt üks valik, mille korral vaadeldav tõeväärtus on vale
  - *Täiesti valedeks*, kui nende tõeväärtus on vale, olemata käsitlevatest hulkadest

Hulgateooria valemite interpreteerimine I

- Meie poolt fikseeritavat viisi φ hulgateooria sümbolite tähenduste ning valemite tõeväärtuste leidmiseks nimetame ***klassikaliseks interpretatsiooniks***, kui on täidetud järgmised kokkulepped:
  - **Kõigepealt peab olema välja valitud selline klass K, millest tohivad pärineda tähistatavad hulgad**
  - Kui x on hulga tähis, siis **φx∈K** ning seejuures **x∫φx**
  - **Kui W on hulgateooria valem, siis**

φW = 1 ∫ *valemi W tõeväärtus on õige interpretatsiooni φ korral*

φW = 0 ∫ *valemi W tõeväärtus on vale interpretatsiooni φ korral*

Hulgateooria valemite interpreteerimine III

- $\varphi(x\in y) = 1$ ∫ ***hulk*** φx ***on elemendiks hulgas*** φy
- $\varphi(x\in y) = 0$ ∫ ***hulk*** φx ***ei ole elemendiks hulgas*** φy

W	$\neg W$
0	1
1	0

W_1	W_2	$W_1 \,\&\, W_2$	$W_1 \vee W_2$	$W_1 \supset W_2$	$W_1 \Leftrightarrow W_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Hulgateooria valemite interpreteerimine II

- $\varphi(x \in y) = 1$ ∫ ***hulk*** φx ***on elemendiks hulgas*** φy
- $\varphi(x \in y) = 0$ ∫ ***hulk*** φx ***ei ole elemendiks hulgas*** φy

- $\varphi(\neg W) = \text{ant } \varphi(W)$, kus
  ant 0 = 1, ant 1 = 0
- $\varphi(W_1 \& W_2) = \min [\varphi(W_1), \varphi(W_2)]$,
  kus min[0,0]=0, min[0,1]=0, min[1,0]=0, min[1,1]=1
- $\varphi(W_1 \vee W_2) = \max [\varphi(W_1), \varphi(W_2)]$,
  kus max[0,0]=0, max[0,1]=1, max[1,0]=1, max[1,1]=1
- $\varphi(W_1 \supset W_2) = \text{imp} [\varphi(W_1), \varphi(W_2)]$,
  kus imp[0,0]=1, imp[0,1]=1, imp[1,0]=0, imp[1,1]=1
- $\varphi(W_1 \Leftrightarrow W_2) = \text{ekv} [\varphi(W_1), \varphi(W_2)]$,
  kus ekv[0,0]=1, ekv[0,1]=0, ekv[1,0]=0, ekv[1,1]=1

Hulgateooria valemite interpreteerimine IV

- $\varphi(x \in y) = 1$ $\int$ *hulk φx **on** elemendiks hulgas φy*
- $\varphi(x \in y) = 0$ $\int$ *hulk φx **ei ole** elemendiks hulgas φy*

- $\varphi(\neg W) = 1 - \varphi W$
- $\varphi(W_1 \& W_2) = \varphi W_1 \cdot \varphi W_2$
- $\varphi(W_1 \vee W_2) = \varphi W_1 + \varphi W_2 - \varphi W_1 \cdot \varphi W_2$
- $\varphi(W_1 \supset W_2) = 1 - \varphi W_1 + \varphi W_1 \cdot \varphi W_2$
- $\varphi(W_1 \Leftrightarrow W_2) = 1 - \varphi W_1 - \varphi W_2 + 2\varphi W_1 \cdot \varphi W_2 =$

$$= 1 - |\varphi W_1 - \varphi W_2|$$

Hulgateooria valemite interpreteerimine V

- Kui on *eelnevalt kokku lepitud*, millisest klassist K tohivad päripeda tähise x tähenduseks olevad hulgad ning W(x) tähistab valemit, milles esineb tähis x, siis

$$\varphi[(\forall x)W(x)] = \min\{\varphi W \mid \varphi x \in K\}$$

- Ehk $\varphi[(\forall x)W(x)]$ on **vähim tõeväärtus**, mida võib omada valem W olenevalt tähise x tähenduse valikust.

- Kui on *eelnevalt kokku lepitud*, millisest klassist K tohivad päripeda tähise x tähenduseks olevad hulgad ning W(x) tähistab valemit, milles esineb tähis x, siis

$$\varphi[(\exists x)W(x)] = \max\{\varphi W \mid \varphi x \in K\}$$

- Ehk $\varphi[(\exists x)W(x)]$ on **suurim tõeväärtus**, mida võib omada valem W olenevalt tähise x tähenduse valikust.

Valemite samaväärsus

- Kaks valemit W’ ning W” on *samaväärsed*, kui φW’=φW” mistahes interpretatsiooni φ korral.

Näited:

Valemid $\neg\neg$W ja W on samaväärsed

Valemid W&U ja U&W on samaväärsed

Valemid W$\vee$W ja W on samaväärsed

Valemite samaväärsus (jätk)

- Konjunktsiooni idempotentsus: $W\&W \Leftrightarrow W$
- Konjunktsiooni kommutatiivsus: $W\&Q \Leftrightarrow Q\&W$
- Konjunktsiooni assotsiatiivsus: $W_1\&(W_2\&W_3) \Leftrightarrow (W_1\&W_2)\&W_3$
- Disjunktsiooni idempotentsus: $W \vee W \Leftrightarrow W$
- Disjunktsiooni kommutatiivsus: $W \vee Q \Leftrightarrow Q \vee W$
- Disjunktsiooni assotsiatiivsus: $W_1 \vee (W_2 \vee W_3) \Leftrightarrow (W_1 \vee W_2) \vee W_3$
- Konjunktsiooni distributiivsus disjunktsiooni suhtes: $Q_1\&(Q_2 \vee Q_3) \Leftrightarrow (Q_1\&Q_2) \vee (Q_1\&Q_3)$
- Disjunktsiooni distributiivsus konjunktsiooni suhtes: $Q_1 \vee (Q_2\&Q_3) \Leftrightarrow (Q_1 \vee Q_2)\&(Q_1 \vee Q_3)$

Hulgateooria valemite interpreteerimine. Näide

- Leiame tõeväärtuste tabeli valemile $\neg(A\&B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$
- Interpreteerime sama valemit kasutades kahendoperatsioone: ant, min, max, ekv.

Hulkade kirjeldamine hulgateooria valemite abil

Selleks, et moodustada mingi uus hulk, tuleb:

- Kõigepealt välja mõelda milliste omadustega peavad antud hulga elemendid olema ehk milline on see tingimus, mida need elemendid peavad rahuldama, et kuuluda meie poolt moodustavasse hulka
- Seejärel formuleerida meie poolt sõnastatud tingimus hulgateooria valemina
- Lõpuks määratleda, et meie poolt moodustatav hulk koosneb nendest ja ainult niisugustest elementidest, mille korral vastav hulgateooria valem on õige

Osahulgad

- **Määratlus.** **Hulga H osahulgaks** on iga niisugune hulk, *mille kõik elemendid*, kui neid üleüldse on, peavad pärinema hulgast H.
- Seejuures **Lepime kokku kirjutada:**
  - **$A \subseteq H$** ∫ Hulk A on hulga H osahulgaks
  - **Hulk A on hulga H osahulgaks** ∫ $(\forall\alpha)[\alpha\in A \supset \alpha\in H]$
  - **$A \subseteq H$** ∫ $(\forall\alpha)[\alpha\in A \supset \alpha\in H]$

Näited:

Hulk {♥,♠} on hulga {♣,♦,♥,♠} osahulgaks

Hulk {⊗,⊕,∇} ei ole hulga {⊕,®,©,⊗} osahulgaks

Määratlus: Hulk X on hulga Y osahulk, kui hulgas X ei leidu selliseid elemente, mis pole hulga Y elementideks ehk lühemalt

$X \subseteq \mathbf{Y}$ ∫ $\neg(\exists\alpha\in X)(\alpha\notin Y)$

Osahulgad

- Iga hulk on iseenda osahulk $\forall X(X \subseteq X)$
- Tühi hulk on iga hulga osahulgaks $\forall X(\emptyset \subseteq X)$

Määratlus: Mistahes hulga H *triviaalsed osahulgad* on hulk H ise ja tühi hulk $\emptyset$

Järeldus: Mistahes hulgal on alati olemas vähemalt üks osahulk.

Osahulgad. Näited

- Hulga {♥ ♠} osahulkadeks on :
  - Esiteks $\emptyset$
  - Teiseks {♥}
  - Kolmandaks {♠}
  - Neljandaks {♥,♠}
- Hulga $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ osahulkadeks on :

(1)$\emptyset$, (2) $\{\alpha\}$, (3) $\{\beta\}$, (4) $\{\gamma\}$,

(5) $\{\alpha, \beta\}$, (6) $\{\alpha, \gamma\}$, (7) $\{\beta, \gamma\}$, (8) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

Astmehulgad

- Hulga H *astmehulk* ehk *kõikide osahulkade hulk*, mille tähiseks on 2^H, on hulk, mille elementideks on hulga H osahulgad ehk lühemalt $2^H=\{X \mid X\subseteq H\}$ ehk veidi teisel moel $(\forall X)(X\in 2^H \Leftrightarrow X\subseteq H)$
- Mistahes lõpliku hulga H korral, mille elementide arv on E(H) on selle astmehulga elementide arv $E(2^H)=2^{E(H)}$
- Mistahes hulgas on alati täpselt üks niisugune osahulk (nimelt $\varnothing$), mille elementide arv on null.
- Lõplike hulkade korral saab mistahes hulgas M ainult ühel osahulgal olla sama elementide arv, mis hulgal endal – ja selleks on alati hulk M ise.

Astmehulgad. Mõned arvutused

- Kui palju on x-elemendilises hulgas y-elemendilisi osahulki?

x!/y!(x-y)!

Näide. Kahte ühesugust täringut visates on *erinevaate* silmade võimalike paare (ehk 6-elemendilise hulga 2-elemendilisi osahulki)

6!/2!(6-2)!=15.

Osahulgaks olemise mõned omadused

Järeldus 1. Osahulgaks olemise seos on **refleksiivne** ehk $(\forall X)[X \subseteq X]$.

Järeldus 2. Osahulgaks olemise seos on **mittesümmeetriline** ehk $\neg(\forall XY)[\ X \subseteq Y \supset Y \subseteq X\ ]$.

Tõestus. Vaatleme hulkasid $\varnothing$ ning $\{\varnothing\}$.

Järeldus 3. Osahulgaks olemise seos on **transitiivne** ehk $(\forall XYZ)[\ (X \subseteq Y \& Y \subseteq Z) \supset X \subseteq Z\ ]$.

Tõestus. Esiteks: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{H} \int (\forall \alpha)[\alpha \in A \supset \alpha \in H]$, mistahes hulkade korral. Teiseks: $(W_1 \supset W_2 \& W_2 \supset W_3) \supset (W_1 \supset W_3)$, mistahes valemite korral.

Järeldus 4. Osahulgaks olemise seos on **mittefundeeritud** ehk on olemas selline lõputu hulkade jada A, B, C, … , X, Y, Z, … , mille korral ... $Z \subseteq Y$, $Y \subseteq X$, … , $C \subseteq B$, $B \subseteq A$.

Tõestuse idee. Vaatleme hulki $N_\alpha = \{\ \beta \mid \beta \in N \ \&\ \beta \geq \alpha\ \}$.