SÜSTEEMIDE SELITAMINE, SARNASUS, MODELLEERIIMINE

Süsteemide selitamine ehk “väljakaevamine”

- Hulkade vaatlemisel võib sageli tunduda, et tegemist on mingit sisemist ülesehitust omava kogumiga. St, et vaadeldavas hulgas ei figureeri lihtsalt *ei-tea-kuidas* kokku võetud elemendid, vaid ainult sellised, mis rahuldavad teatavaid predikaate (st evivad mingeid kindlaid omadusi või on mingil kindlal viisil üksteisega seotud).
- “Tundumisest” edasi ***määratletuseni*** jõudmiseks (et selgelt esile tuua, mis on siis antud juhul just meile olulised elemendid ja predikaadid), läheb vaja sobivat protseduuri, mida edaspidi nimetame süsteemi selitamiseks (“väljakaevamiseks”, “ilmutamiseks” vms)

Süsteemide selitamiseks vajalik eeltöö:
A. elementide fikseerimine

- Esimene asi, mida süsteemi "väljatoomiseks" vaja läheb – on elementide fikseerimine, mille tarbeks vajame n-ö aluslepet: ***kas selleks, et***
- mingi fikseeritava **tunnuse abil** "kõige mõeldava" seast ***välja valida*** kõik meile olulised elemendid, ja ainult need; ***või hoopis selleks, et***
- mingi fikseeritava **genereerimise või konstrueerimise viisi abil** ***tekitada*** kõik meile olulised elemendid ja ainult need.

Süsteemide selitamiseks vajalik eeltöö: B. elementide ja korteežide järjestamine

Olles eelnevalt ära fikseerinud kõik meile huvi pakkuvad elemendid, moodustame järgmised hulgad:

$H^{(1)}$ ∫ **kõikide meie poolt fikseeritud elementide hulk H**

$H^{(2)}$ ∫ kõikide meie poolt fikseeritud elementidest moodustatud järjestatud paaride hulk

$H^{(3)}$ ∫ kõikide meie poolt fikseeritud elementidest moodustatud järjestatud kolmikute hulk ....

Cart (H) = $H^{(1)} \cup H^{(2)} \cup H^{(3)} \cup$ … …

Tuginedes Zermelo ja von Neumanni teoreemidele – *järjestame* ja *indekseerime* kõik hulga Cart(H) elemendid

Süsteemide selitamiseks vajalik eeltöö: C. omavahelise seotuse fikseerimine

- Kui kõik meile olulised elemendid on fikseeritud, siis tuleb fikseerida viis, mille abil otsustada
- Kas mingid **üksikult vaadeldavad elemendid** evivad meie meelest mõnd tähelepanu väärivat omadust või mitte
- Kas mingis **korteežis paiknevad elemendid** on meie meelest kuidagiviisi omavahel seotud või mitte

Süsteemide selitamiseks vajalik eeltöö: D. samalaadsuse fikseerimine

- Kui elemendid on fikseeritud, siis tuleb fikseerida viis, mille abil otsustada
- Kas mingid kaks vaadeldavat **elementi** on meie meelest samalaadsed, “ühte nägu”, “sarnase moega” vms
- Kas mingid kaks vaadeldavatest elementidest moodustatud **korteeži** on meie meelest samalaadsed, “ühte nägu” vms
- Seejuures eeldame, et

I. iga asi on iseendaga samalaadne (ehk iseendaga sarnane)

II. kui üks asi on samalaadne teisega, siis ka teisipidi – teine asi on samalaadne esimesega

III. samalaadsus ***ei pea alati edasi kanduma*** (ehk sellest, et A on samalaadne B-ga, B omakorda samalaadne C-ga ei tulene automaatselt A ja C samalaadsus!)

Süsteemide sarnasus

Vaatleme mõistetet, mille tähiseks eesti keeles on sageli kasutusel sõnad:

nagu, samasugune, samalaadne, sarnane jms.

Kohelet

- Tuhandeid aastaid tagasi elanud mees, keda on nimetatud kuningas Taaveti pojaks ning keda kutsuti Kohelet (nõnda kõlava sõna heebreakeelne tähendus on – *koguja*). Kogujalt on Vana Testamendi vahendusel jõudnud tänapäeva tähelepanuväärseid mõtteid. Näiteks: *Mis on olnud, see saab olema, ja mis on tehtud, seda tehakse veel – ei ole midagi uut päikese all. Või on midagi, mille kohta võiks öelda: "Vaata, see on uus?" Kindlasti see oli juba olemas muistseil aegadel, mis on olnud enne meid!*
- Koheleti õpetuses on tegemist äärmuseni või lausa tüdimuseni ulatuva sarnasuse nägemisega: kõik olukorrad on sarnased mingite varasematega (***mis on olnud, see saab olema***), kõik tegevused on samalaadsed varemtehtuga (***mis on tehtud, seda tehakse veel***), kõik asjad on samasugused nagu ennegi (kuna – ***see oli olemas juba muistseil aegadel***).

Leibniz versus Kohelet

- “Üleüldise sarnasuse” küsimuses on aga vastupidise äärmuse – ehk “üleüldise erinevuse” poolel samuti võimalik leida ühte-teist mõtlemisväärset. Nii näiteks kirjutas ***üldise erinevusprintsiibi*** sõnastanud geniaalne saksa õpetlane Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716): ***kaks füüsilist indiviidi ei saa kunagi olla absoluutselt sarnased; vähe sellest, üks ja sama indiviid … pole kunagi üle ühe momendi sarnane iseendaga*.** Enamgi veel: ***absoluutselt mitte kusagil ei esine täielikku sarnasust***

Sarnasus ja morfismid

- Kahe äärmuse: ***kõikjal laiutava sarnasuse*** ning sellele vastanduva ***üleüldise erinevuse*** vahele jääb ala, mille piirides saame mõistlikult käsitleda süsteemide sarnasust.

Määratlus 1. Kaht süsteemi nimetame ***sarnasteks***, kui leidub niisugune vastavus, mille korral üksteisele vastavad elemendid on üksteisele vastavates seostes. Ehk veidi täpsemalt – ***kui*** leidub säärane vastavus, mille korral esimese süsteemi elementidele a, b, … , c ja seosele R vastavad teises süsteemis elemendid x, y, … , z ja seos Q, ning ***kui*** esimeses süsteemis on elemendid a, b, … , c omavahel seoses R, ***siis*** nende elementide vasted teises süsteemis x, y, … , z on omavahel seoses Q.

- Algebralises süsteemide teoorias on kõige perfektsema sarnasuse väljendamiseks kasutusel ***isomorfismi*** mõiste, "veidi vähem perfektsema" sarnasuse korral aga kasutatakse ***homomorfismi*** mõistet.

Isomorfism ja homomorfism

Määratlus 2. Kaks süsteemi on teineteisega ***isomorfsed*** kui nende vahel eksisteerib niisugune ***üks-ühene vastavus***, mille korral – kui esimese süsteemi elementidele a, b, … , c ja seosele R vastavad teises süsteemis ***üks-ühele*** elemendid x, y, … , z ja seos Q, ning kui esimeses süsteemis on elemendid a, b, … , c omavahel seoses R, siis nende elementide vasted teises süsteemis x, y, … , z on omavahel seoses Q.

- Kui loobuksime isomorfismi määratluses süsteemide elementide *üks-ühese vastavuse* nõudest ja asendaksime selle ***ühese vastavuse*** nõudega, siis saaksime sellise sarnasuse määratluse, mida matemaatikud nimetavad ***homomorfismiks*.**

Isomorfismiklasside olemasolu aksioom

- Iga süsteemi korral eksisteerib hulk, mille moodustavad kõik selle süsteemiga isomorfsed hulgad

Homomorfism, isomorfism ja samalaadsus

Süsteemide “kättesaamise”, “väljakaevamise” ehk selitamise juures oli meil tegemist samalaadsusega, mis mõnevõrra erineb eespool defineeritud morfismide mõistetest. Seetõttu tuleb ranges matemaatilises raamistuses osata vahet teha, millega nimelt siis tegemist on.

Homomorfismi, isomorfismi ja samalaadsuse erinevusest

Olulisimaks erinevuseks on homomorfismi/isomorfismi korral transitiivsuse ehk "edasikanduvuse" nõue, mille kohaselt:

kui üks asi on homomorfne/isomorfne mingi teise asjaga, see teine on aga omakorda homomorfne/isomorfne kolmandaga, siis esimene ja kolmas on samuti homomorfsed/isomorfsed.

NB! Samalaadsuse korral me säärast asja ***ei nõudnud*** **(ega keelanud ju ka!).**

Homomorfismi, isomorfismi ja samalaadsuse erinevusest

Veel üheks tähelepanu nõudvaks erinevuseks on asjaolu, et

- samalaadsuse korral ***võisime*** käsitleda isegi üksikuid elemente, täpsustamata seda, milline võiks olla nende n-ö sisemine ülesehitus
- homomorfismi/isomorfismi korral kõnelesime aga kindlasti süsteemidest, mis eeldab teatava ülesehituse olemasolu.

Homomorfismi, isomorfismi ja samalaadsuse kokkupuutest

Kuna samalaadsust määratledes

- polnud keelatud nn sisemise ülesehituse olemasolu ja sellega arvestamine ning
- polnud keelatud transitiivsus,

siis võime öelda, et samalaadsuse korral on definitsioonide kohaselt tegemist võib-olla pisut “laiemaks venitatava” või “laiemat haarava” mõistega, kui seda on homomorfism või isomorfism.

- Seejuures ***ei*** väidetud, nagu oleks samalaadsuse näol tegemist üldisema mõistega, mis täielikult haaraks nii homomorfismi kui ka isomorfismi definitsioonid.

Isomorfsete süsteemide näited I

- Korralikult koostatud skeem ja sellel kujutatud seadeldis ***peaksid*** olema teineteisega ***isomorfsed*** (skeemil paiknevatele kujunditele peaksid *üks-ühele* vastama seadme komponendid, kusjuures – kui skeemil kujutatu väljendab seotust – siis vastavad asjad seadmes ongi tegelikult vastaval viisil seotud).

- **Märkus.** Kuna *üks-ühene* vastavus on olemuselt *ühese* vastavause erijuhtumiks, siis on ka süsteemide *isomorfism* oma olemuselt *homomorfismi erijuhtumiks.*

Isomorfsete süsteemide näited II

Süsteemid $\langle\{0,1\}; \max\rangle$ ja $\langle\{0,1\}; \min\rangle$ **on isomorfsed.**

Tõepoolest – korraldame mõlema süsteemi vahel **üks-ühese vastavuse**: $0 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow 0$, $\max \leftrightarrow \min$
Vaatleme nüüd esimesest süsteemist pärit elementidele **b, c, d** vastavaid elemente **b′, c′, d′** teisest süsteemist.

Pole raske kontrollida, et kui esimeses süsteemis $\max(b,c)=d$, siis teises süsteemis $\min(b',c')=d'$

Isomorfsete süsteemide näited III

Süsteemid $\langle R^+ ; \bullet , : \rangle$ ning $\langle R ; + , - \rangle$, on isomorfsed, kus **$R^+$ on kõikide positiivsete reaalarvude hulk** ning **R on kõikide reaalarvude hulk.**

Tõepoolest – korraldame üks-ühese vastavuse:

$R^+ \leftrightarrow R$, $\bullet \leftrightarrow +$, $: \leftrightarrow -$,

kus $(\forall x \in R^+)(\forall y \in R)[\,(x \leftrightarrow y) \Leftrightarrow (\log x = y)\,]$

Sellisel juhul näeme, et

$x_1 \bullet x_2 = x_3 \Leftrightarrow y_1 + y_2 = y_3$ ja $x_1 : x_2 = x_3 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = y_3$

Mitteisomorfsete süsteemide näited I

Süsteemid **$\langle\{0,1,2\}; \min\rangle$** ja **$\langle\{0,1\}; \min\rangle$**
ei ole isomorfsed.

Tõepoolest – mõlema süsteemi vahel ***pole võimalik*** korraldada **üks-ühest vastavust**

Mitteisomorfsete süsteemide näited II

Süsteemid

$\langle\{0,1,2,3, \ldots\}; \bullet\rangle$ ja $\langle\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}; +\rangle$

ei ole isomorfsed.

Tõestus. ***Oletame vastupidist.*** Sellisel juhul peab mõlema süsteemi vahel eksisteerima selline ***üks-ühene vastavus* f**, mis "säilitab ülesehitust":

$f(x \bullet y) = f(x) + f(y)$

Kui võtame y=0, siis saame iga x korral, et

$f(x) = f(x \bullet y) - f(y) = f(x \bullet 0) - f(0) = f(0) - f(0) = 0$,

mis on vastuolus sellega, et **f** peab olema just nimelt ***üks-ühene vastavus***, mille korral, kui $i \neq j$, siis $f(i) \neq f(j)$.

Homomorfsete süsteemide näited

- Süsteemid $\langle \mathbf{N}; + \rangle$ ja $\langle \{0,1\}; \max \rangle$ **on homomorfsed.**

  Tõepoolest – korraldame mõlema süsteemi vahel **ühese vastavuse**:

  $n \to 0$, kui $n=0$ ja $n \to 1$, kui $n \neq 0$ ja $+ \to \max$

  Vaatleme nüüd esimesest süsteemist pärit elementidele **b, c, d** vastavaid elemente

  b', c', d' teisest süsteemist.

  Pole raske kontrollida, et kui esimeses süsteemis **$b+c=d$**, siis teises süsteemis **$\max(b',c')=d'$**

Homomorfsete süsteemide ja mittehomomorfsete süsteemide näited I

Süsteemid $\langle\{0,1,2\}; \mathbf{max}\rangle$ ja $\langle\{0,1\}; \mathbf{min}\rangle$ **on homomorfsed.**

Tõepoolest – korraldame mõlema süsteemi vahel **ühese vastavuse**:

$\mathbf{0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 0, max \rightarrow min}$

Seoseks **max** järjestatud kolmikute hulk

$\{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 0,2,2\rangle, \langle 2,0,2\rangle, \langle 1,2,2\rangle, \langle 2,1,2\rangle, \langle 2,2,2\rangle\}$, millele vastab hulk

$\{\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle\}$, millest kordused "välja rookides" saame hulga $\{\langle 1,1,1\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle\}$ ehk seose **min**.

Homomorfsete süsteemide ja mittehomomorfsete süsteemide näited II

Süsteemid $\langle\{0,1\}; \max\rangle$ ja $\langle\{0,1,2\}; \min\rangle$ **ei saa olla homomorfsed.**

Tõepoolest – mõlema süsteemi vahel ***pole võimalik*** korraldada **ühest vastavust.**

Kuna – kui mingi selline ühene vastavus φ eksisteeriks, siis peaks definitsiooni kohaselt dom $\varphi = \{0,1\}$ ning samas rng $\varphi = \{0,1,2\}$. Samas ***ei tohiks*** esineda sellist olukorda, kus mingi x korral eksisteerivad **teineteisest erinevad** y ja z, nii, et $\varphi(x)=y$ ja $\varphi(x)=z$.

Homomorfismi, isomorfismi ja samalaadsuse erinevusest

Veel üheks tähelepanu nõudvaks erinevuseks on asjaolu, et

- samalaadsuse korral võisime käsitleda üksikuid elemente, täpsustamata seda, milline võiks olla nende n-ö sisemine ülesehitus
- homomorfismi/isomorfismi korral kõnelesime aga kindlasti süsteemidest, mis eeldab teatava ülesehituse olemasolu.

Homomorfismi ja isomorfismi erinevusest

Teoreem. Süsteemide isomorfism on oma olemuselt süsteemide vaheline binaarne ***ekvivalentsuse seos*** ehk seos, mis rahuldab ***refleksiivsuse, sümmeetria ja transitiivsuse*** tingimusi.

Märkus. Homomorfismi korral saame kõnelda küll refleksiivsusest ja transitiivsusest, kuid mitte alati sümmeetriast!

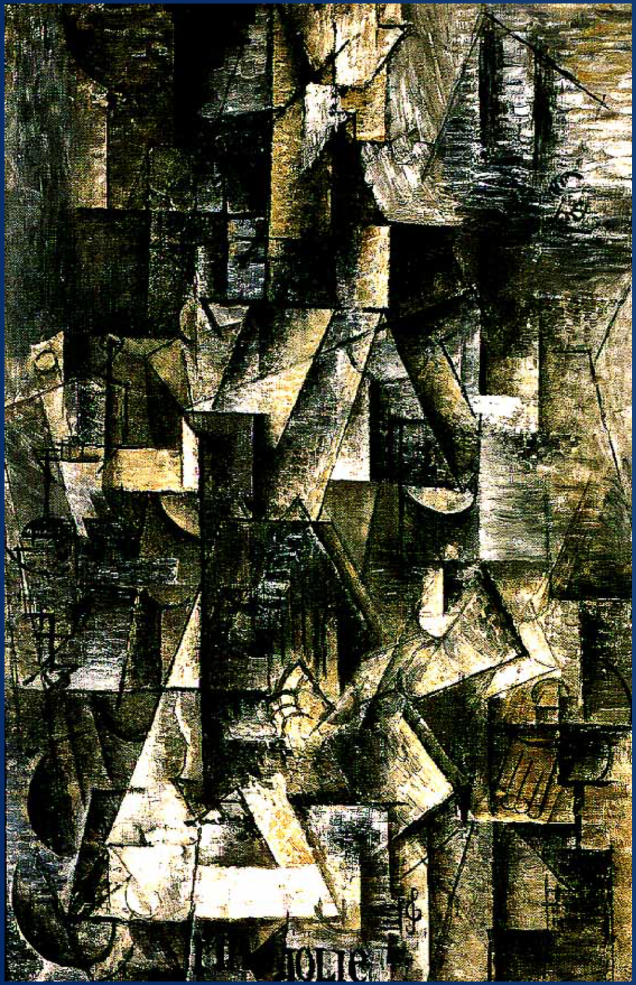
Homomorfismi, isomorfismi ja samalaadsuse erinevusest

	refleksiivsus	sümmeetria	transitiivsus
samalaadsus	+	+	-
homomorfism	+	-	+
isomorfism	+	+	+

Selgitus. + ∫ kindlasti on - ∫ võimalik, et pole

Sarnaste süsteemide näide

“Ma Jolie” “Naine tsitri või kitarriga”



?

Pablo Picasso (1883 – 1973)

Sarnasus ja modelleerimine

- Sarnasuse tuvastamisel on suur praktiline väärtus, kuna ***sarnastel süsteemidel on sarnased omadused*** ning ***sarnastes olukordades käituvad sarnased süsteemid sarnasel moel.*** Nimetatud asjaolule rajaneb ühtede süsteemide uurimise asendamine neile sarnaste süsteemide uurimisega.

Määratlus. ***Modelleerimiseks*** nimetame tegevust, mille sihiks on mingi ühe süsteemi uurimine sel teel, et tegelikult vaadeldakse hoopis teist süsteemi, mis on sarnane esimesega. Kõnealust teist süsteemi nimetatakse seejuures (esimese süsteemi) ***mudeliks.***

Modelleerimise viisidest

Kui modelleeritava süsteemi mudeliks on abstraktne struktuur, **siis** võib kõnelda

- **teoreetilisest modelleerimisest**, erijuhul
- **matemaatilisest modelleerimisest** (mille korral uuritakse tegelikkuses eksisteerivaid süsteeme hoopis nende matemaatiliste mudelite abil).

- Termini modelleerimine kõrval kasutatakse sageli (vahel veidi teise tähendusega) sõnu **imiteerimine** ja **simuleerimine.**

Mudelite ja modelleerimise näited

Näide 1. Ühtlase ja sirgjoonelise liikumise *matemaatiliseks mudeliks* on selline abstraktse aegruumi punktide hulk, mida seob teatav lineaarvõrrandite kogum.

Näide 2. Teatavas vanuses lapsed mängivad perekonda, kodu ja kooli. Sellisel juhul on keegi mängult isa, keegi mängult ema kusjuures sedaviisi mängivad lapsed on mängult abielus. Mingi osa lastetoast on mängult köök, kusagil on mängult kool, kus keegi on mängult direktor jne. Oma olemuselt on mäng *modelleerimine*.

Samalaadsuse ja sarnasuse olulisus intelligentsete süsteemide jaoks

Samalaadsuse, eriti sarnasuse tuvastamine annab võimaluse ühe süsteemi kohta teadaolevaid asju kasutada teise süsteemi korral.

Eriti väärtuslik on selles vallas isomorfism: väited, mis on paikapidavad ühe süsteemi korral on üldiselt paikapidavad ka teise süsteemi jaoks.

Väga oluline märkus. Enne kui alustame ühe süsteemi kohta kogutud tarkust rakendamist teise süsteemi juures, ***tuleb formuleerida ja tõestada*** isomorfismi või homomorfismi või samalaadsuse olemasolu!