Süsteemi selitamise näide

Süsteemide selitamiseks vajalik töö: kollektsioonide kogumise alustamine ja esimese küsimuse esitamine

- Kui on fikseeritud (1) käsitletavad elemendid, (2) seotuse tuvastamise viis, (3) samalaadsuse tuvastamise viis, siis tuleb alustada kollektsioneerimist kollektsiooni P_0 kogumisega:
- Kõigepealt valime käsitletavate elementide ning korteežide ühendhulgast Cart(H) elemendi, mille indeks on 0. Olgu selle elemendi tähiseks h_0.
- Kohe küsime ka **esimese küsimuse:** Kui tegemist oli üksiku elemendiga, kas sellel elemendil on meie meelest mingi tähelepanu vääriv omadus? Kui tegemist oli korteežiga, siis küsime nõnda: kas selle korteeži positsioonidel figureerivad elemendid on meie meelest omavahel kuidagiviisi seotud?

Süsteemide selitamiseks vajalik töö: kollektsioonide kogumise jätkamine ja teise küsimuse esitamine

- Kui esimese küsimuse vastus oli “ei”, siis kuulutame kollektsiooni P_0 kogumise lõppenuks tühja tulemusega ($P_0=\emptyset$) ja alustame kollektsiooni P_1 kogumist, nagu eespool tegime.

- Kui esimese küsimuse vastus oli “jah”, siis jätkame kollektsiooni P_0 kogumist. Selleks võtame esimese uue sobiva üksiku elemendi või korteeži (st, et kui oli üksik element, siis võtame samuti uue üksiku elemendi; kui aga oli korteež – siis võtame samasuguse positsioonide arvuga uue korteeži). Nüüd küsime uuesti esimest küsimust (omaduse evimise või seotuse kohta) ja koos sellega **teist küsimust:** kas meie “väljavalitu” on samalaadne ***kõikide*** nendega (st üksikute elementide või korteežidega), mis kollektsioonis juba olemas?

Süsteemide selitamiseks vajalik töö: kollektsioonide kogumise jätkamine ja mõlema küsimuse esitamine

- Kui äsja esitatud esimese või teise küsimuse vastus oli “ei”, siis jätame “väljavalitu” kõrvale ning võtame vaatluse alla esimese nende seast, mida antud etapi raames pole veel vaadeldud.
- Kui vastus oli “jah”, siis lisame “väljavalitu” oma kollektsiooni ning valime vastavalt esimese uue elemendi või korteeži: esimese nende seast, mida veel proovinud pole (NB! *valime vastavalt* – tähendas jällegi seda, et kui kollektsioonis on juba vaid üksikud elemendid, siis valime üksiku elemendi; kui aga korteežid, siis valime samasuguse kohtade arvuga korteeži).
- Nüüd küsime uuesti **esimest küsimust** omaduse evimise või seotuse kohta ja koos sellega **teist küsimust**, et kas meie “väljavalitu” on samalaadne ***kõikide nendega*** (st üksikute elementide või korteežidega), mis kollektsioonis juba olemas?

Süsteemide selitamiseks vajalik töö: kollektsioonide kogumise lõpetamine

- Kui enam pole võimalik leida niisuguseid “väljavalituid”, mille korral mõlema küsimuse vastuseks oleks “jah”, siis tuleb antud kollektsiooni P_0 kogumine ära lõpetada.
- Seejärel võtame ühendhulga Cart(H) elemendi h_1 ja alustame kollektsiooni P_1 moodustamist. Teeme seda analoogiliselt kollektsiooni P_0 moodustamisega. Kui kollektsiooni P_1 kogumine on lõpetatud, siis võtame ühendhulgast Cart(H) järjekordse elemendi ja alustame vastava kollektsiooni moodustamist. Jne, jne, jne.
- **Kui** uute kollektsioonide alustamiseks sobivat “materjali” enam pole – **siis** lõpetame kollektsioonide kogumise.

Süsteemide selitamiseks vajalik töö: süsteemi signatuuri moodustamine

- Kui kollektsioonide kogumine on lõpetatud, siis moodustame hulga, mille elementideks on kõik mittetühjad kollektsioonid.
- Iga eelnimetatud (mittetühi) kollektsioon kujutab endast, kas meie poolt fikseeritud elementide hulga H mingit osahulka, või selle hulga mõne Cartesiuse astme osahulka.
- Teatavasti on hulga H osahulkade näol tegemist hulga H elementide omadustega, Cartesiuse astmete osahulkade näol aga on tegemist hulga H elementide vaheliste seostega.
- Seega oleme kokku kogunud hulga H elementide kõik sellised omadused või nende elementide vahelised kõik sellised seosed, mida võimaldasid meie valikud seotuse ning samalaadsuse tuvastamisel.
- Nii olemegi moodustanud ühe konkreetse signatuuri Σ ning järelikult “välja kaevanud” ka **ühe konkreetse süsteemi ⟨H,Σ⟩**

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö A.

Vaatleme juhtumisi kõikide naturaalarvude hulka

N={0,1,2,3, …}

Tundugu meile, et kõik need arvud meile huvi ei paku. Tuleks teha mingi valik.
Meie isiklik “tark mees taskus” sosistab, et:
vaata ainult selliseid arvusid, mida on vaja kõikide naturaalarvude kättesaamiseks liitmise abil. Sest ainult need on olulised!

Võtame nõuannet kuulda. Seega on elementide fikseerimine teostatud: **H={0,1}**.

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö B.

Kuna edaspidi huvitab meid veider küsimus: et

kas selles hulgas H mingi süsteem ka peidus on,

siis peame mõtlema võimalikele omadustele või seostele, mida lähemal vaatlemisel võiksime huvi pakkuvateks pidada.

Selleks aga peame esialgu olema valmis n-ö "halvimaks":

kõikide eelnevalt fikseeritud elementide ning neist moodustatud korteežide vaatlemiseks.

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö B.

Kõik eelnevalt fikseeritud elemendid ja neist moodustatud korteežid – ehk, nagu mäletame, **hulga Cart(H) elemendid** on meil siin:

0, 1,

⟨0,0⟩, ⟨0,1⟩, ⟨1,0⟩, ⟨1,1⟩,

⟨0,0,0⟩, ⟨0,0,1⟩, ⟨0,1,0⟩, ⟨0,1,1⟩, ⟨1,0,0⟩, ⟨1,0,1⟩, ⟨1,1,0⟩, ⟨1,1,1⟩,

⟨0,0,0,0⟩, ⟨0,0,0,1⟩, ⟨0,0,1,0⟩, ⟨0,0,1,1⟩, ⟨0,1,0,0⟩, ⟨0,1,0,1⟩, ⟨0,1,1,0⟩, ⟨0,1,1,1⟩, ⟨1,0,0,0⟩, ⟨1,0,0,1⟩,…

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö C.

Oleme eespool fikseerinud (nagu “tark mees taskus” soovitas) meile seekord huvi pakkuvad elemendid: 0 ning 1. Järgnevalt peame keskenduma sellele, et

- esile tuua üksikute elementide niisugused omadused, mis meile edaspidi huvi pakuvad

ning

- tuvastada seotust korteežides (st paarides, kolmikutes jms) paiknevate elementide vahel.

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö C.

“Tark mees taskus” annab meile siinkohal järgmist nõu:

- üksikutel elementidel pole mingeid huvitavaid omadusi
- paarides esinevad elemendid on meile huvi pakkuval viisil seotud vaid siis, kui nad pole võrdsed
- kolmikutes on tähelepanu väärivat seotust märgata pea kõikjal, välja arvatud juhul kui kolmiku esimesel kahel kohal paiknevad võrdsed elemendid, millega samas pole võrdne kolmandal kohal paiknev element
- nelikute, viisikute ja veelgi enama kohaliste korteežide käsitlemine ei paku antud juhul üldse huvi

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö C.

"Tark mees taskus" soovitas seotuse osas järgmist:

0, 1,

⟨0,0⟩, ⟨0,1⟩, ⟨1,0⟩, ⟨1,1⟩,

⟨0,0,0⟩, ⟨0,0,1⟩, ⟨0,1,0⟩, ⟨0,1,1⟩, ⟨1,0,0⟩, ⟨1,0,1⟩, ⟨1,1,0⟩, ⟨1,1,1⟩,

⟨0,0,0,0⟩, ⟨0,0,0,1⟩, ⟨0,0,1,0⟩, ⟨0,0,1,1⟩, ⟨0,1,0,0⟩, ⟨0,1,0,1⟩, ⟨0,1,1,0⟩, ⟨0,1,1,1⟩, ⟨1,0,0,0⟩, ⟨1,0,0,1⟩,...

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö D.

Nüüd peame mõtlema sellele, et milliseid korteeže pidada samalaadseteks. “Tark mees taskus” annab nõu, mida seejuures kohe kõrvale jätta:

- kuna üksikutel elementidel polnud mingeid huvitavaid omadusi, siis nende samalaadsus pole samuti huvitav
- ebahuvitavateks osutusid ka enam kui kolme positsiooniga korteežid – seetõttu pole nendegi samalaadsus huvi pakkuv

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö D.

Jääb veel küsida, et milliseid järjestatud paare või kolmikuid pidada samalaadseteks. “Tark mees taskus” annab jällegi nõu:

- järjestatud paarid $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ ja $\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ olgu meie jaoks samalaadsed järgmistel juhtudel:

(0) kui tegemist on samade paaridega (st siis, kui $\alpha_1=\beta_1$ ja $\alpha_2=\beta_2$)

(1) kui need paarid on n-ö mittevõrdsete “paarilistega” (st siis, kui $\alpha_1\neq\alpha_2$ ja $\beta_1\neq\beta_2$)

Süsteemi selitamise näide. Eeltöö D.

- mingid kaks järjestatud kolmikut $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ ja $\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle$ olgu meie jaoks samalaadsed järgmistel juhtudel:

(0) eelkõige siis, kui tegemist on samade kolmikutega (st, kui $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$, $\alpha_3=\beta_3$)

(1) ühel kolmikutest on kahel esimesel positsioonil ühesugused elemendid (st, et $\alpha_1=\alpha_2$ või $\beta_1=\beta_2$), kusjuures pole tähtis, millised elemendid paiknevad nende kolmikute viimastel positsioonidel;

(2) kummalgi kolmikutest pole kahel esimesel kohal ühesuguseid elemente, aga seejuures on mõlemal kolmikul kolmandal positsioonil üks ja see sama element (st, et $\alpha_1\neq\alpha_2$ ja $\beta_1\neq\beta_2$ aga samas $\alpha_3=\beta_3$).

Süsteemi selitamise näide. Töö:

- Kui on fikseeritud (1) käsitletavad elemendid, (2) seotuse tuvastamise viis, (3) samalaadsuse tuvastamise viis, siis tuleb alustada kollektsioneerimist (kollektsiooni P_0 kogumisega):
- Enne kollektsioneerimisega pihta hakkamist, meenutame seda, kuidas nägi meil välja hulk Cart(H):

0, 1,

$\langle 0,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$, $\langle 1,0\rangle$, $\langle 1,1\rangle$,

$\langle 0,0,0\rangle$, $\langle 0,0,1\rangle$, $\langle 0,1,0\rangle$, $\langle 0,1,1\rangle$, $\langle 1,0,0\rangle$, $\langle 1,0,1\rangle$, $\langle 1,1,0\rangle$, $\langle 1,1,1\rangle$,

$\langle 0,0,0,0\rangle$, $\langle 0,0,0,1\rangle$, $\langle 0,0,1,0\rangle$, $\langle 0,0,1,1\rangle$, $\langle 0,1,0,0\rangle$, $\langle 0,1,0,1\rangle$, $\langle 0,1,1,0\rangle$, $\langle 0,1,1,1\rangle$, $\langle 1,0,0,0\rangle$, $\langle 1,0,0,1\rangle$,...

Seega: **$h_0=0$, $h_1=1$, $h_2=\langle 0,0\rangle$, …, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …, $h_{23}=\langle 1,0,0,1\rangle$, …**

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, $h_2=\langle 0,0\rangle$, …, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …, $h_{23}=\langle 1,0,0,1\rangle$, …**
- Samuti tuletame meelde eeltööd: seda, mida lugesime seotuks ja seda, mida lugesime samalaadseks.

Alustame elemendiga h_0. Vastav kollektsioon P_0 jääb tühjaks, kuna sellel elemendil polnud meie jaoks mitte ühtegi huvi pakkuvat omadust.

Sama lugu on elemendi h_1 ja kollektsiooniga P_1.

Jätkame elemendiga h_2. Seegi kollektsioon P_2 jääb tühjaks, kuna korteeži h_2 esimesel ja teisel positsioonidel paiknevate elementide vahel (st 0 ja 0 vahel) polnud meie jaoks mitte ühtegi huvi äratavat seost.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, $h_2=\langle 0,0\rangle$, $h_3=\langle 0,1\rangle$, $h_4=\langle 1,0\rangle$, $h_5=\langle 1,1\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Jõuame elemendini $h_3=\langle 0,1\rangle$ Vastav kollektsioon P_3 ei jää tühjaks! Kuna korteežis $\langle 0,1\rangle$ paiknevad elemendid (st 0 ja 1) olid meie meelest mingil viisil seotud.

Nüüd hakkame korteežiga $h_3=\langle 0,1\rangle$ võrdlema hulga Cart(H) ülejäänud elemente. Kuna samalaadsuse tuvastamine eeldab sama positsioonide arvu, siis langevad välja kõik hulga H üksikud elemendid ja neist moodustatud enam kui kahekohalised korteežid. Seega jäävad võrrelda vaid h_2,h_4,h_5.

h_2 ja h_5 ei sobi seotuse pinnal. Niisiis, seotuse ja samalaadsuse alusel sobivad omavahel ainult h_3 ja h_4. Järelikult **$P_3=\{h_3,h_4\}$**.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, $h_2=\langle 0,0\rangle$, $h_3=\langle 0,1\rangle$, $h_4=\langle 1,0\rangle$, $h_5=\langle 1,1\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Jätkame elemendiga $h_4=\langle 1,0\rangle$ Vastav kollektsioon P_4 ei jää tühjaks! Kuna korteežis $\langle 1,0\rangle$ paiknevad elemendid (st 1 ja 0) olid meie meelest mingil viisil seotud.

Nüüd hakkame korteežiga $h_4=\langle 1,0\rangle$ võrdlema hulga Cart(H) ülejäänud elemente. Kuna samalaadsuse tuvastamine eeldab sama positsioonide arvu, siis langevad välja kõik hulga H üksikud elemendid ja neist moodustatud enam kui kahekohalised korteežid. Seega jäävad võrrelda vaid h_2, h_3, h_5.

h_2 ja h_5 ei sobi seotuse pinnal. Niisiis, seotuse ja samalaadsuse alusel sobivad omavahel ainult h_3 ja h_4. Seega **$P_4 = P_3 = \{h_3,h_4\}$.**

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Elemendi $h_5=\langle 1,1\rangle$ korral jääb vastav kollektsioon P_5 tühjaks! Kuna korteežis $\langle 1,1\rangle$ paiknevad elemendid (st 1 ja 1) pole meie meelest mitte mingil huvi äratataval viisil seotud.

Jätkame elemendi $h_6=\langle 0,0,0\rangle$ ja kollektsiooniga P_6. Vastav kollektsioon P_6 ei jää tühjaks! Kuna korteežis $\langle 0,0,0\rangle$ paiknevad elemendid (st 0,0,0) olid meie meelest mingil viisil seotud.

Alustame kollektsiooni P_6 koostamist elemendist h_6, mis olgu esialgu selle kollektsiooni ainus teadaolev element.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Nüüd hakkame korteežiga $h_6=\langle 0,0,0\rangle$ võrdlema hulga Cart(H) ülejäänud elemente. Kuna samalaadsuse tuvastamine eeldab sama positsioonide arvu, siis langevad välja kõik hulga H üksikud elemendid, neist moodustatud järjestatud paarid ja enam kui kolmekohalised korteežid. Seega jäävad võrrelda vaid $h_7,h_8,h_9,h_{10},h_{11},h_{12},h_{13}$. Neist langevad seotuse pinnal välja h_7,h_{13}. Seega jäävad võrdlemiseks $h_8,h_9,h_{10},h_{11},h_{13}$.

Võrdleme korteeže h_6,h_8. Korteeži h_8 positsioonidel paiknevad elemendid on meie arvates omavahel seotud. Samuti on need korteežid samalaadsed (kuna neist ühel, nimelt korteežil h_6, on ühesugused elemendid kahel esimesel positsioonil). Seega saame kollektsiooni P_6 lisada elemendi h_8.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Nüüd hakkame omavahel võrdlema korteeže h_6,h_8,h_9. Korteeži h_9 positsioonidel paiknevad elemendid on meie arvates omavahel seotud. Korteežid h_6,h_8 on meie meelest samalaadsed (kuna neist ühel, nimelt korteežil h_6, on ühesugused elemendid kahel esimesel positsioonil).

Sama lugu on korteežidega h_6,h_9.

Korteežid h_8,h_9 aga pole meie meelest pole omavahel samalaadsed, kuna vastavad tingimused (1), (2) pole kumbki täidetud!

Järelikult pole kollektsioonis P_6 juba esinevatele elementidele võimalik lisada elementi h_9. Seetõttu jätkame elemendiga h_{10}.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Nüüd hakkame omavahel võrdlema korteeže h_6,h_8,h_{10}. Korteeži h_{10} positsioonidel paiknevad elemendid on meie arvates omavahel seotud. Korteežid h_6,h_8 on meie meelest samalaadsed (kuna neist ühel, nimelt korteežil h_6, on ühesugused elemendid kahel esimesel positsioonil).

Sama lugu on korteežidega h_6,h_{10}.

Korteežid h_8,h_{10} on meie meelest samalaadsed, kuna vastavatest tingimustest (1), (2) on täidetud teine (st, et $\alpha_1\neq\alpha_2$ ja $\beta_1\neq\beta_2$ aga samas $\alpha_3=\beta_3$).

Seega võime kollektsioonis P_6 juba esinevatele elementidele lisada elemendi h_{10}. Jätkame oma tegevust elemendiga h_{11}.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Hakkame omavahel võrdlema korteeže h_6,h_8,h_{10},h_{11}. Korteeži h_{11} positsioonidel paiknevad elemendid on meie arvates omavahel seotud. Korteežid h_6,h_8 on meie meelest samalaadsed (kuna neist ühel, nimelt korteežil h_6, on ühesugused elemendid kahel esimesel positsioonil).

Sama lugu on korteežidega h_6,h_{10} ning h_6,h_{11}.

Korteežid h_8,h_{10} on meie meelest samalaadsed, kuna vastavatest tingimustest (1), (2) on täidetud teine (st, et $\alpha_1\neq\alpha_2$ ja $\beta_1\neq\beta_2$ aga samas $\alpha_3=\beta_3$). Samas aga pole meie meelest samalaadsed h_8,h_{11}, kuna ei tingimus (1) ega (2) pole täidetud.

Seega jätame elemendi h_{11} ja jätkame tegevust elemendiga h_{13}.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

- **h_0=0, h_1=1, …, h_5=⟨1,1⟩, h_6=⟨0,0,0⟩, h_7=⟨0,0,1⟩, h_8=⟨0,1,0⟩, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Hakkame omavahel võrdlema korteeže h_6,h_8,h_{10},h_{13}. Korteeži h_{13} positsioonidel paiknevad elemendid on meie arvates omavahel seotud. Eelnevast teame, et samalaadseteks osutusid korteežid h_6 ja h_8; h_6 ja h_{10}; h_8 ja h_{10}. Meie meelest on samalaadsed ka korteežid h_6 ja h_{13}; h_8 ja h_{13}; h_{10} ja h_{13}. (kuna neist ühel, nimelt korteežil h_{13}, on ühesugused elemendid kahel esimesel positsioonil). Järelikult võime kollektsiooni P_6 täiendada korteežiga h_{13}.

Rohkem meil kollektsiooni P_6 täiendamiseks korteeže võtta pole. Järelikult on selle kollektsiooni maksimaalne maht käes: P_6 = {h_6, h_8, h_{10}, h_{13}} ehk

P_6 = {⟨0,0,0⟩, ⟨0,1,0⟩, ⟨1,0,0⟩, ⟨1,1,1⟩}

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Võtame nüüd elemendi $h_7=\langle 0,0,1\rangle$ ja hakkame moodustama kollektsiooni P_7.

Paraku jääb see kollektsioon tühjaks, kuna meie arvates polnud antud korteeži h_7 positsioonidel paiknevad elemendid seotud meile huvi pakkuval viisil.

Niisiis peame edasi minema elemendiga $h_8=\langle 0,1,0\rangle$ ja hakkame moodustama kollektsiooni P_8, mille esimeseks elemendiks võtame $h_8=\langle 0,1,0\rangle$.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Jätkame siis elemendiga $h_8=\langle 0,1,0\rangle$. Vastav kollektsioon P_8 ei jää tühjaks! Kuna korteežis $\langle 0,1,0\rangle$ paiknevad elemendid (st 0,1,0) olid meie meelest mingil viisil seotud.

Nüüd hakkame korteežiga $h_8=\langle 0,1,0\rangle$ võrdlema hulga Cart(H) ülejäänud elemente. Kuna samalaadsuse tuvastamine eeldab sama positsioonide arvu, siis langevad välja kõik hulga H üksikud elemendid, neist moodustatud järjestatud paarid ja enam kui kolmekohalised korteežid. Seega jäävad võrrelda vaid $h_6,h_7,h_9,h_{10},h_{11},h_{12},h_{13}$. Neist langevad seotuse pinnal välja h_7,h_{12}. Järele jäävad h_6, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{13}.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **h_0=0, h_1=1, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Võrreldes elemendiga $h_8=\langle 0,1,0\rangle$ kõigepealt korteeži h_6, näeme, et kollektsiooni P_8, milles esialgu esineb vaid korteež h_8, võib täiendada korteežiga h_6.

Võrreldes nüüd juba korteežidega h_8, h_6, korteeži h_9, näeme, et viimane pole samalaadne korteežiga h_8. Seetõttu jätame h_9 kõrvale ning hakkame omavahel võrdlema korteeže h_8, h_6, h_{10}. Veendudes, et kõik kolm on omavahel paarikaupa sarnased, võime kollektsiooni P_8 “rikastada” korteežiga h_{10}. Nõndaviisi samm-sammult edasi liikudes, jõuame lõpuks tulemuseni:

$P_8=\{h_8, h_6, h_{10}, h_{13}\}$, millest omakorda $P_8=P_6$.

Süsteemi selitamise näide. Töö:

Meenutame:

- **$h_0=0$, $h_1=1$, …, $h_5=\langle 1,1\rangle$, $h_6=\langle 0,0,0\rangle$, $h_7=\langle 0,0,1\rangle$, $h_8=\langle 0,1,0\rangle$, …**
- Samuti seda, mida lugesime seotuks ja mida samalaadseks.

Võttes käsile järgmise kollektsiooni P_9 moodustamise, peame alustama hulga Cart(H) elemendist $h_9=\langle 0,1,1\rangle$. Sooritades juba tuttavaid tegevusi – jõuame selleni, et $P_9=\{h_9, h_6, h_{11}, h_{13}\}$ ehk $P_9 = \{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,1,1\rangle\}$.

Edasi töötades saame, et $P_{10}=\{h_{10}, h_6, h_8, h_{13}\} = P_6 = P_8$. Samal viisil veendume, et $P_{11} = \{h_{11}, h_6, h_9, h_{13}\} = P_9$.

Vahepeal jõuame veel ühe tühja kollektsioonini: P_{12}. Kollektsioneerimise lõpetab $P_{13}=\{h_{13}, h_6, h_8, h_{10}\} = P_6=P_8=P_{10}$.

Süsteemi selitamise näide. Töö lõpp.

Kollektsioneerimise tulemusena tekkis meil järgmistest mitte tühjadest kollektsioonidest moodustatud hulk $\Sigma=\{P_3, P_6, P_9\}$, kus

$P_3 = \{h_3,h_4\} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$

$P_6 = \{h_6, h_8, h_{10}, h_{13}\} = \{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle\}$

$P_9 = \{h_9, h_6, h_{11}, h_{13}\} = \{\langle 0,0,0\rangle, \langle 0,1,1\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 1,1,1\rangle\}$.

Võttes kasutusele tähistused

$1- \int P_3$

min $\int P_6$

max $\int P_9$

võime öelda, et oleme hulgast {0,1} suutnud "välja kaevata" süsteemi $\langle$ **{0,1} ; 1– , min, max** $\rangle$ ehk süsteemi, millel nimeks

kahe-elemendiline Boole' algebra.