BINAARSETE SEOSTE OLULISED OMADUSED

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 1

Cartesiuse ruudud

Määratlus. Hulga A ***Cartesiuse teiseks astmeks*** ehk ***Cartesiuse ruuduks*** nimetame hulka

$A^{(2)}=\{\langle p,q\rangle \mid p\in A \ \&\ q\in A\}$

Näide 1. Kui H={0,1}, siis

$H^{(2)}=\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

Näide 2. Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0}. Sellisel juhul

$\{△,◇,○,☆,0\}^{(2)}=\{△,◇,○,☆,0\} \times \{△,◇,○,☆,0\} =$

$= \{ \langle △, △\rangle, \langle △, ◇\rangle, \langle △, ○\rangle, \langle △, ☆\rangle, \langle △, 0\rangle,$

$\langle ◇, △\rangle, \langle ◇, ◇\rangle, \langle ◇, ○\rangle, \langle ◇, ☆\rangle, \langle ◇, 0\rangle,$

$\langle ○, △\rangle, \langle ○, ◇\rangle, \langle ○, ○\rangle, \langle ○, ☆\rangle, \langle ○, 0\rangle,$

$\langle ☆, △\rangle, \langle ☆, ◇\rangle, \langle ☆, ○\rangle, \langle ☆, ☆\rangle, \langle ☆, 0\rangle,$

$\langle 0, △\rangle, \langle 0, ◇\rangle, \langle 0, ○\rangle, \langle 0, ☆\rangle, \langle 0, 0\rangle \}$

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 2

Kõikide naturaalarvude hulga Cartesiuse ruut

$N^{(2)} = \{\langle 0,0\rangle\ \langle 0,1\rangle\ \langle 0,2\rangle\ \langle 0,3\rangle\ \langle 0,4\rangle\ \langle 0,5\rangle\ \langle 0,6\rangle \dots \dots \dots$

$\langle 1,0\rangle\ \langle 1,1\rangle\ \langle 1,2\rangle\ \langle 1,3\rangle\ \langle 1,4\rangle\ \langle 1,5\rangle\ \langle 1,6\rangle \dots \dots \dots$

$\langle 2,0\rangle\ \langle 2,1\rangle\ \langle 2,2\rangle\ \langle 2,3\rangle\ \langle 2,4\rangle\ \langle 2,5\rangle\ \langle 2,6\rangle \dots \dots \dots$

$\langle 3,0\rangle\ \langle 3,1\rangle\ \langle 3,2\rangle\ \langle 3,3\rangle\ \langle 3,4\rangle\ \langle 3,5\rangle\ \langle 3,6\rangle \dots \dots \dots$

$\langle 4,0\rangle\ \langle 4,1\rangle\ \langle 4,2\rangle\ \langle 4,3\rangle\ \langle 4,4\rangle\ \langle 4,5\rangle\ \langle 4,6\rangle \dots \dots \dots$

$\langle 5,0\rangle\ \langle 5,1\rangle\ \langle 5,2\rangle\ \langle 5,3\rangle\ \langle 5,4\rangle\ \langle 5,5\rangle\ \langle 5,6\rangle \dots \dots \dots$

$\langle 6,0\rangle\ \langle 6,1\rangle\ \langle 6,2\rangle\ \langle 6,3\rangle\ \langle 6,4\rangle\ \langle 6,5\rangle\ \langle 6,6\rangle \dots \dots \dots$

$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \dots \dots$

$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \dots\ \}$

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 3

Kahe hulga Cartesiuse korrutised

Määratlus. Hulkade A ja B ***Cartesiuse korrutiseks*** nimetame hulka {⟨α,β⟩ | (α∈A)&(β∈B)},
mida tähistame kirjutisega A×B.
Seega - A×B = {⟨α,β⟩ | (α∈A)&(β∈B)}

Näide 1. Kui H_1={O, □} ja H_2={$,£,¤}, siis
H_1×H_2 = {⟨O,$⟩,⟨O,£⟩,⟨O,¤⟩,⟨□,$⟩,⟨□,£⟩,⟨□,¤⟩}

Näide 2. Kui A={1,2} ja B={x,y,z}, siis
A×B={⟨1,x⟩, ⟨1,y⟩, ⟨1,z⟩, ⟨2,x⟩, ⟨2,y⟩, ⟨2,z⟩}
B×A={⟨x,1⟩, ⟨x,2⟩, ⟨y,1⟩, ⟨y,2⟩, ⟨z,1⟩, ⟨z,2⟩}
Järeldus. **Üldjuhul** A×B ≠ B×A

Unaarsete predikaatide määratlus

- **Ühekohaliseks predikaadiks** hulgas H ehk hulga H **elementide omaduseks** nimetame hulga H suvalist osahulka Ω. ***Kui*** Ω tähistab hulga H elementide mingit omadust ja α tähistab hulga H mingit elementi, ***siis***
- Ω(α) ∫ elemendil α on omadus Ω
- elemendil α on omadus Ω ∫ α∈Ω

Omaduste näited

- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust P, mille korral P(m) ∫ element m on algarv. Sellisel juhul P={2,3,5}
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust T, mille korral T(u) ∫ element u on kordarv. Sellisel juhul T={4,6}
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust F, mille korral F(t) ∫ element t on Fibonacci arv.
  Sellisel juhul Q={1,2,3,5}
- Vaatleme hulka {🕖,🕓,⌘,◈,🕚} ning omadust K, mille korral K(e) ∫ element e on ajanäitaja.
  Sellisel juhul K= {🕖,🕓,🕚}

Binaarsete predikaatide määratlus

- **2-kohaliseks predikaadiks** ehk **2-kohaliseks seoseks** ehk **binaarseks predikaadiks hulkade** H_1, H_2 elementide vahel nimetame hulga $H_1 \times H_2$ suvalist osahulka

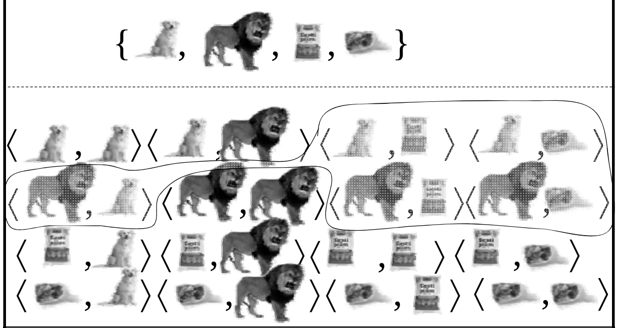
Kui Φ tähistab mingit binaarset seost H_1, H_2 elementide vahel ja α_1, α_2 tähistavad mingeid elemente vastavatest hulkadest, **siis**

- $\Phi(\alpha_1, \alpha_2) \int \alpha_1$ ja α_2 on seoses Φ
- α_1 ja α_2 on seoses $\Phi \int$ **[$\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle \in \Phi$] & [$\Phi \subseteq H_1 \times H_2$]**

__Teoreem.__ Iga binaarne seos kujutab endast järjestatud paaride mingit omadust.

__Tõestus.__ Vaatleme hulkade H_1, H_2 elementide vahelist binaarset seost Φ. Kuna $\Phi \subseteq H_1 \times H_2$, siis on definitsiooni järgi tegemist hulga $H_1 \times H_2$ elementide ehk järjestatud paaride omadusega.

Binaarsete seoste näited I



Binaarsete seoste näited II

- Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0} ja seost ∠, mille korral $\alpha \angle \beta \int \alpha$ on nurgelisem kui β.

Sellisel juhul {△,◇,○,☆,0} × {△,◇,○,☆,0} =
= { ⟨△, △⟩, ⟨△, ◇⟩, ⟨△, ○⟩, ⟨△, ☆⟩, ⟨△, 0⟩,
⟨◇, △⟩, ⟨◇, ◇⟩, ⟨◇, ○⟩, ⟨◇, ☆⟩, ⟨◇, 0⟩,
⟨○, △⟩, ⟨○, ◇⟩, ⟨○, ○⟩, ⟨○, ☆⟩, ⟨○, 0⟩,
⟨☆, △⟩, ⟨☆, ◇⟩, ⟨☆, ○⟩, ⟨☆, ☆⟩, ⟨☆, 0⟩,
⟨0, △⟩, ⟨0, ◇⟩, ⟨0, ○⟩, ⟨0, ☆⟩, ⟨0, 0⟩ } ja

∠ = {⟨△, ○⟩, ⟨△, 0⟩, ⟨◇, △⟩, ⟨◇, ○⟩,
⟨◇, 0⟩, ⟨☆, △⟩, ⟨☆, ◇⟩, ⟨☆, ○⟩, ⟨☆, 0⟩}

Seoste näited III

- Vaatleme hulkasid {△,◇,○,☆,0} ning {1,2,3,4,5,6} ja seost Ⓐ, mille korral αⒶβ ∫ α "teravate" nurkade arv on β.
  Sellisel juhul {△,◇,○,☆,0} × {1,2,3,4,5,6} =
  = { ⟨△, 1⟩, ⟨△, 2⟩, ⟨△, 3⟩, ⟨△, 4⟩, ⟨△, 5⟩, ⟨△, 6⟩,
  ⟨◇, 1⟩, ⟨◇, 2⟩, ⟨◇, 3⟩, ⟨◇, 4⟩, ⟨◇, 5⟩, ⟨◇, 6⟩,
  ⟨○, 1⟩, ⟨○, 2⟩, ⟨○, 3⟩, ⟨○, 4⟩, ⟨○, 5⟩, ⟨○, 6⟩,
  ⟨☆, 1⟩, ⟨☆, 2⟩, ⟨☆, 3⟩, ⟨☆, 4⟩, ⟨☆, 5⟩, ⟨☆, 6⟩,
  ⟨0, 1⟩, ⟨0, 2⟩, ⟨0, 3⟩, ⟨0, 4⟩, ⟨0, 5⟩, ⟨0, 6⟩ } ja

  Ⓐ = {⟨△, 3⟩, ⟨◇, 4⟩, ⟨☆, 5⟩}

Erikokkulepe binaarsete seoste jaoks

- Kui S on binaarse seose sümbol ja mingite x ning y korral S(x,y), siis reeglina kirjutatakse S(x,y) asemel xSy
- Näiteks ei kirjutata =(α,β) – vaid α=β; ei kirjutata $\in$(X,Y) – vaid X$\in$Y; ei kirjutata $\perp$(s,t) – vaid s$\perp$t
- Kuid on ka **erandeid! Jagajaks olemist väljendava seose** korral – mida tähistatakse kirjutisega **div** –tähistab seda, et arv m on arvu n jagajaks, kirjutis **div(m,n)** ja mitte kirjutis **m div n** (näiteks **div(2,6)**, mitte **2 div 6**)

Samade tähiste kasutamisest

- Sageli kasutatakse omaduste ning seoste tähistamiseks samu sümboleid ja nimetusi, kuigi formaalselt võttes on tegemist erinevatest korteežidest koosnevate seostega. **Niisugust asja võimaldab** tähiseks-tähenduseks olemise **seose ∫ mitteühesus.**
- **Näide.** Vaatleme kaht hulka: **{0,1,2}** ja **{4,5,6,7}.** Moodustame mõlema hulga jaoks binaarsed seosed: **{**⟨0,1⟩, ⟨0,2⟩, ⟨1,2⟩**}** ja **{**⟨4,5⟩, ⟨4,6⟩, ⟨4,7⟩, ⟨5,6⟩, ⟨5,7⟩, ⟨6,7⟩**}.**
  Neis seostes pole ainsatki ühist paari. Samas on üsna ootuspärane, et mõlema korral kasutatakse **ühte ja sama tähist**, milleks on **<** .
- **Märkus. Samanimeliste omaduste ja seostega** on meil tegemist tavaliselt siis, **kui tegemist on mõne "avarama" omaduse või seose "kitsamate" osadega.**

Binaarsed funktsionaalsed seosed

<u>Määratlus.</u> Mingit 2-kohalist seost **F** nimetatakse **kahe**-kohaliseks funktsionaalseks seoseks ehk (NB!) **ühe**-kohaliseks funktsiooniks, kui selle seose kõikide sidumite viimased elemendid on esimeste poolt üheselt määratud ehk lühemalt: kui $\langle x,y'\rangle \in$ **F** ning $\langle x,y''\rangle \in$ **F**, siis $y' = y''$.

Kokkuleppeliselt kasutatakse järgmist tähistusviisi:

- **F**(x)=y ∫ $\langle x,y\rangle \in$ **F**
- **F**(x) ∫ (∃y)**[F**(x)=y **&** $\langle x,y\rangle \in$ **F]**

Funktsiooni F määramispiirkonnaks nimetatakse hulka dom F = { x | (∃y)**[F**(x)=y**]** }

Funktsiooni F väärtuste piirkonnaks nimetatakse hulka rng F = { y | (∃x)**[F**(x)=y**]** }

Unaarsete funktsioonide näiteid

- Kahekohaline seos F, mille korral F(x,t) ∫ x isa on t **on** ühekohaline funktsioon
- Kahekohaline seos P, mille korral

  P(x,c) ∫ x on c vanaisa **ei ole** ühekohaline funktsioon
- Kahekohaline seos R, mille korral

  R(u,w) ∫ arvu u ruut võrdub arvuga w

  on ühekohaline funktsioon
- Kahekohaline seos D, mille korral

  D(m,n) ∫ arv m jagub arvuga n

  ei ole ühekohaline funktsioon

Vastavused

<u>Määratlus 1.</u> Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vahelist seost F nimetame **üheseks vastavuseks**, kui on täidetud järgmised tingimused:

- Iga element hulgast H_1 on seoses F täpselt ühe sobiva elemendiga hulgast H_2
- Iga element hulgast H_2 on seoses F mingi sobiva elemendiga hulgast H_1

<u>Määratlus 2.</u> Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vahelist seost F nimetame **üks-üheseks vastavuseks**, kui on täidetud järgmised tingimused:

- Iga element hulgast H_1 on seoses F täpselt ühe sobiva elemendiga hulgast H_2
- Iga element hulgast H_2 on seoses F täpselt ühe sobiva elemendiga hulgast H_1

Vastavused ja unaarsed funktsioonid

Teoreem 1. Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vaheline ***ühene*** vastavus F on seos, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

- dom F = H_1
- rng F = H_2

Teoreem 2. Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vaheline ***üks-ühene*** vastavus F on seos, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

- dom F = H_1
- rng F = H_2
- kui $p \neq q$, siis $F(p) \neq F(q)$

Vastavuste näiteid

- Hulgad {△,◇,○,☆,0} ning {1,2,3,4,5,6} **ei ole** üheses vastavuses
- Hulgad {0,1,2,3,4,5,6,7,8, …} ja {0,2,4,6,8, …} **on** üks-üheses vastavuses
- Kõikide naturaalarvude hulk ja kõikide reaalarvude hulk **ei ole** üks-üheses vastavuses
- Kõikide naturaalarvude hulk N ja hulk {0,1} **on** üheses vastavuses (võtame $F(n)=[1+(-1)^n]:2$)
- Kõikidest naturaalarvudest moodustatud järjestatud paaride hulk N×N ja kõikide naturaalarvude hulk N **on** üks-üheses vastavuses (võtame $F(x,y)=c^2(x,y)$)

Binaarsete seoste omaduste näiteid I

- **Vaatleme hulka H ja binaarset seost R selle hulga elementide vahel**
- R on **refleksiivne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\in H)[\alpha R\alpha]$
- Paralleelsuse seos on **refleksiivne** kõikide sirgete hulgal
- R on **mitterefleksiivne** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\in H)[\alpha R\alpha]$
- Seos ® arvude hulgas, mille korral m®w ∫ m ruut on w – on **mitterefleksiivne:** 0®0, 1®1, kuid ¬2®2, ¬3®3
- R on **täiesti mitterefleksiivne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\in H)\neg[\alpha R\alpha]$
- **Ristseisu seos ⊥ kõikide sirgete hulgal on täiesti mitterefleksiivne**

Binaarsete seoste omaduste näiteid II

- R on **sümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha R\beta\supset\beta R\alpha]$
- Ristseisu seos $\perp$ on sümmeetriline kõikide sirgete hulgal
- R on **mittesümmeetriline** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha R\beta\supset\beta R\alpha]$
- Seos ♥ on mittesümmeetriline kõikide inimeste hulgal
- R on **täiesti mittesümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)\neg[\alpha R\beta\supset\beta R\alpha]$
- **Seos $<$ on täiesti mittesümmeetriline arvude hulgal**

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 19

Binaarsete seoste omaduste näiteid III

- Seos R on **antisümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)[(\alpha R\beta\ \&\ \beta R\alpha)\supset\alpha=\beta]$
- Seos $\leq$ on **antisümmeetriline** kõikide arvude hulgal
- Seos R on **mitteantisümmeetriline** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\in H)[(\alpha R\beta\ \&\ \beta R\alpha)\supset\alpha=\beta]$
- Seos ⊟**,** mille korral m⊟w ∫ |m| ja |w| on võrdsed on **mitteantisümmeetriline** kõikide täisarvude hulgal**:** näiteks (–3)⊟(+3) ja (+3)⊟(–3), kuid (–3) $\neq$ (+3)**;** kui aga m ja w on positiivsed, siis (m⊟w & w⊟m) $\supset$ m=w
- Seos R on **täiesti mitteantisümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)\neg[(\alpha R\beta\ \&\ \beta R\alpha)\supset\alpha=\beta]$
- **Ristseisu seos $\perp$ kõikide sirgete hulgal on täiesti mitteantisümmeetriline**

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 20

Binaarsete seoste omaduste näiteid IV

- Seos R on **transitiivne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\gamma\in H)[(\alpha R\beta\ \&\ \beta R\gamma)\supset\alpha R\gamma]$
- Paralleelsuse seos on **transitiivne** kõikide sirgete hulgal
- Seos R on **mittetransitiivne** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\gamma\in H)[(\alpha R\beta\ \&\ \beta R\gamma)\supset\alpha R\gamma]$
- Seos ♥ on **mittetransitiivne** kõikide inimeste hulgal
- Seos R on **täiesti mittetransitiivne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\gamma\in H)\neg[(\alpha R\beta\ \&\ \beta R\gamma)\supset\alpha R\gamma]$
- Isaks olemise seos ♔ on **täiesti mittetransitiivne** kõikide inimeste hulgal

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 21

Binaarsete seoste omaduste näiteid V

- Seos R on **ekvivalentsusseos** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & sümmeetriline**
- Seos || on **ekvivalentsuse seos** kõikide sirgete hulgal
- Seos R on **mitte-ekvivalentsusseos** hulgal H, kui R on hulgal H **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ $\vee$ **mittesümmeetriline**
- Seos $\perp$ on **mitte-ekvivalentsuse** seos kõikide sirgete hulgal (kuna $\perp$ on mitterefleksiivne)

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 22

Binaarsete seoste omaduste näiteid VI

- Seos R on **osalise järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & & antisümmeetriline**
- Seos $\leq$ on **osalise järjestuse seos** kõikide arvude hulgal
- Seos R **ei ole osalise järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal H **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ **mitte-antisümmeetriline**
- Seos $\perp$ **ei ole osalise järjestuse seos** kõikide sirgete hulgal (kuna $\perp$ on mitterefleksiivne)

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 23

Binaarsete seoste omaduste näiteid VII

- R on **totaalne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha R\beta]$
- Ühise punkti olemasolu seos ℗ on **totaalne** hulgal {X,Y,Z}, mille elementideks on ruumi ristkoordinaadistiku moodustavad kolm sirget
- R on **mittetotaalne** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha R\beta]$
- Seos ♥ on **mittetotaalne** kõikide inimeste hulgal
- R on **kvaasitotaalne** ehk **lineaarne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha R\beta \vee \beta R\alpha \vee \alpha=\beta]$
- Seos < on **lineaarne** kõikide arvude hulgal
- R on **mitte-kvaasitotaalne** ehk **mittelineaarne** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\in H)[\alpha R\beta \vee \beta R\alpha \vee \alpha=\beta]$
- Seos on **mittelineaarne** kõikide sirgete hulgal

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 24

Binaarsete seoste omaduste näiteid VIII

- Seos R on **lineaarse järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & antisümmeetriline & kvaasitotaalne**
- Seos $\leq$ on **lineaarse järjestuse seos** kõikide arvude hulgal
- Seos R **ei ole lineaarse järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ **mitte-antisümmeetriline** $\vee$ **mitte-kvaasitotaalne**
- Seos $<$ **ei ole lineaarse järjestuse seos** kõikide arvude hulgal (kuna $<$ on mitterefleksiivne)

Binaarsete seoste omaduste näiteid IX

- Seos R **rahuldab minimaalse elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt **– rahuldab minitingimust**, kui $(\forall B \subseteq H)[B \neq \varnothing \supset (\exists \mu \in B)(\forall \alpha \in B)[\alpha \neq \mu \supset \neg \alpha R \mu]\ ]$ kusjuures elementi μ, mille korral $(\exists \mu \in B)(\forall \alpha \in B)[\alpha \neq \mu \supset \neg \alpha R \mu]$ nimetame **osahulga B minimaalseks elemendiks seose R mõttes**
- Seos $\leq$ **rahuldab minitingimust** kõikide naturaalarvude hulgal
- Seos R **ei rahulda minimaalse elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt **– ei rahulda minitingimust**, kui $\neg(\forall B \subseteq H)[B \neq \varnothing \supset (\exists \mu \in B)(\forall \alpha \in B)[\alpha \neq \mu \supset \neg \alpha R \mu]\ ]$
- Seos **$\leq$ ei rahulda minitingimust** kõikide ratsionaalarvude hulgal kuna näiteks osahulgal $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ pole minimaalset elementi

Binaarsete seoste omaduste näiteid X

- Seos R **rahuldab esimese elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt **rahuldab esitingimust**, kui $(\forall B \subseteq H)[B \neq \varnothing \supset (\exists \varepsilon \in B)(\forall \alpha \in B)[\varepsilon R \alpha]\ ]$ kusjuures elementi ε, mille korral $(\exists \varepsilon \in B)(\forall \alpha \in B)[\varepsilon R \alpha]$ nimetame **osahulga B esimeseks elemendiks seose R mõttes**
- Seos $\leq$ **rahuldab esitingimust** kõikide naturaalarvude hulgal
- Seos R **ei rahulda esimese elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt **ei rahulda esitingimust**, kui $\neg(\forall B \subseteq H)[B \neq \varnothing \supset (\exists \varepsilon \in B)(\forall \alpha \in B)[\varepsilon R \alpha]\ ]$
- Seos Ⓣ, mille korral mⓉn ∫ m on n teguriks **ei rahulda esitingimust** kõikide ühest suuremate naturaalarvude hulgal (kuigi samas rahuldab minitingimust sellel hulgal)

Binaarsete seoste omaduste näiteid XI

- Seos R on **täieliku järjestuse seoseks** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & antisümmeetriline & kvaasitotaalne & rahuldab esitingimust**
- Seos $\leq$ on **täieliku järjestuse seoseks** kõikide naturaalarvude hulgal N
- Seos R **ei ole täieliku järjestuse seoseks** hulgal H, kui R on hulgal H **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ **mitte-antisümmeetriline** $\vee$ **mitte-kvaasitotaalne** $\vee$ **ei rahulda esitingimust**
- Seos $\leq$ **ei ole täieliku järjestuse seoseks** kõikide reaalarvude hulgal (kuna näiteks osahulgas {1, ½, ¼, ⅛, …} **pole esimest**)

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 28

Zermelo teoreem:

Iga mittetühja hulga H korral leidub selline seos R, mis on **täieliku järjestuse seoseks** hulgal H

John von Neumanni teoreem.
Iga ordinaalarv, mis pole nullordinaal (sh iga positiivne naturaalarv) on täielikult järjestatud osahulgaks olemise seosega $\subseteq$.

J. von Neumann
(1903 – 1957)

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 29

Binaarsete seoste omaduste näiteid XII

- Seost R nimetame **vasak-lõplikuks** hulgal H, kui selle hulga **iga** elemendi α korral **leidub vaid lõplik arv** hulga H selliseid elemente β, mille puhul $\beta R \alpha$
- Seos Ⓣ, mille korral mⓉn ∫ m on n teguriks
on vasak-lõplik kõikide positiivsete naturaalarvude hulgal
- Seost R nimetame **mitte-vasak-lõplikuks** hulgal H, kui selle hulga **mõne** elemendi α korral **leidub lõputul arvul** hulga H selliseid elemente β, mille puhul $\beta R \alpha$
- Seos $<$ on **mitte-vasak-lõplik** kõikide täisarvude hulgal

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 30

Binaarsete seoste omaduste näiteid XIII

- Seos R on **regulaarne** ehk **fundeeritud** hulgal H, kui ***pole olemas*** niisugust hulga H elementide jada $x_0, x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots$, milles … $x_{m+1}Rx_m$, … , x_2Rx_1, x_1Rx_0 ja seejuures **lõpmata paljudel juhtudel mõned "naabritest" erinevad teineteisest (st, et $x_m \neq x_{m+1}$).**
- Isaks olemise seos ♔ on **regulaarne** ehk **fundeeritud** kõikide inimeste hulgal
- Seos R on **mitteregulaarne** ehk **mittefundeeritud** hulgal H, leidub niisugune hulga H elementide jada, milles on **lõpmata palju üksteisest erinevaid elemente x_m** ja seejuures …$x_{m+1}Rx_m$,…,x_2Rx_1, x_1Rx_0.
- Seos $<$ on **mitteregulaarne** kõikide täisarvude hulgal, sest näiteks … $-(m+1) < -m$, … , $-2 < -1$, $-1 < 0$

Seose $\leq$ fundeeritus hulgal N

Teoreem. Seos "väiksem või võrdne" rahuldab fundeerituse tingimust kõikide naturaalarvude hulgal. St, et ***pole olemas*** niisugust hulga N elementide jada $x_0, x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots$, milles … $x_{m+1} \leq x_m$, … , $x_2 \leq x_1$, $x_1 \leq x_0$ ja seejuures **lõpmata paljudel juhtudel mõned "naabritest" erinevad teineteisest (st, et $x_m \neq x_{m+1}$).**

Tõestuse idee. Definitsiooni kohaselt $p \leq q \int (p < q \vee p \neq q)$.
$p < q \int p \in q$. Kui antud teoreemi väide poleks õige, siis peaks leiduma lõputu "ahel" $\ldots \in x_n \in x_m \in \ldots \in x_k \in x_j \in \ldots \in x_0$
See aga on vastuolus seose $\in$ fundeeritusega (vt regulaarsust)

Binaarsete seoste omaduste näiteid XIV

- Seos R rahuldab **induktsiooni tingimust** hulgal H, kui hulga H elementide suvalise omaduse M korral $(\forall y \in H)[(\forall x \in H)((xRy \& x \neq y) \supset M(x)) \supset M(y)] \supset (\forall z \in H)M(z)$ ehk "enam sõnade abil" – **kui** hulga H iga elemendi y korral korral sellest, et kõikidel (seose R mõttes) eelnevatel elementidel on omadus M järeldub, et ka elemendil y on see omadus, **siis** evivad omadust M kõik hulga H elemendid (tuletame meelde, et omaduse evimine oli samaväärne teatavasse osahulka kuulumisega)
- Seos $\leq$ rahuldab **induktsiooni tingimust** kõikide naturaalarvude hulgal
- Seos $\leq$ **ei rahulda induktsiooni tingimust** kõikide täisarvude hulgal (kui näiteks $M(b) \int$ b on negatiivne)

IMF-teoreem (Lorents 2001)

Järgmised tingimused on loogiliselt ekvivalentsed:

- Induktsiooni tingimus
- Minimaalsuse tingimus
- Fundeerituse tingimus

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 34

Induktsiooni ja IMF teoreemi kasutamise näide

- Vaatleme omadust: **P(w) ∫ 0+…+w = w(w+1):2**
- Tõestame, et see omadus on kõikide naturaalarvude hulga N igal elemendil.
- Näitame, et seos ≤, rahuldab **induktsiooni tingimust** hulgal N.
- Pole raske veenduda, et seos ≤ rahuldab fundeerituse tingimust hulgal N (st et igale naturaalarvule m eelneb selle seose mõttes vaid lõplik kogus erinevaid naturaalarve). Nüüd rakendame IMF teoreemi, mille kohaselt seos ***rahuldab*** ≤ mistahes omaduse M (st ka siis kui, M=P) puhul ***tingimust***

  $(\forall y\in N)[(\forall x\in N)((x\leq y \& x\neq y)\supset M(x))\supset M(y)] \supset (\forall z\in H)M(z)$

  ehk "enam sõnade abil" – **kui** hulga H iga elemendi y korral sellest, et kõikidel (seose ≤ mõttes) eelnevatel elementidel on omadus M järeldub, et elemendil y on samuti see omadus, **siis** evivad omadust M kõik hulga H elemendid (tuletame meelde, (1) et omaduse evimine oli samaväärne teatavasse osahulka kuulumisega ja (2), et see kehtib ka siis, kui M=P)
- Veendume, et ***iga y korral*** $(\forall x\in N)((x\leq y\&x\neq y)\supset P(x))\supset P(y)$. Paneme tähele, et see on õige, kui y on 0 (sest y=0 korral 0=0(0+1):2). Olgu nüüd y>0 ja olgu et iga x korral $((x\leq y\&x\neq y)\supset P(x))$ ehk – kui mingi arv x on n-ö rangelt väiksem arvust y, siis 0+…+x=x(x+1):2. Nii on ka y-1 korral. St, et 0+…+(y-1)=(y-1)(y-1+1):2. Järelikult P(y) ehk 0+…+y=[0+…+(y-1)]+y=[(y-1)y:2]+y=y(y+1):2. Järelikult ***iga y korral*** $(\forall x\in N)((x\leq y\&x\neq y)\supset P(x))\supset P(y)$. ***Järelikult*** $(\forall z\in N)P(z)$.

21/10/2013 (C) Peeter Lorents, Erika Matsak 35