BINAARSETE SEOSTE OLULISED OMADUSED

Cartesiuse ruudud

Määratlus. Hulga A ***Cartesiuse teiseks astmeks*** ehk ***Cartesiuse ruuduks*** nimetame hulka

$A^{(2)}=\{\langle p,q\rangle \mid p\in A \ \&\ q\in A\}$

Näide 1. Kui H={0,1}, siis

$H^{(2)}=\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

Näide 2. Vaatleme hulka {△,◇,○,☆,0}. Sellisel juhul

{△,◇,○,☆,0}$^{(2)}$={△,◇,○,☆,0} × {△,◇,○,☆,0} =

= { ⟨△, △⟩, ⟨△, ◇⟩, ⟨△, ○⟩, ⟨△, ☆⟩, ⟨△, 0⟩,

⟨◇, △⟩, ⟨◇, ◇⟩, ⟨◇, ○⟩, ⟨◇, ☆⟩, ⟨◇, 0⟩,

⟨○, △⟩, ⟨○, ◇⟩, ⟨○, ○⟩, ⟨○, ☆⟩, ⟨○, 0⟩,

⟨☆, △⟩, ⟨☆, ◇⟩, ⟨☆, ○⟩, ⟨☆, ☆⟩, ⟨☆, 0⟩,

⟨0, △⟩, ⟨0, ◇⟩, ⟨0, ○⟩, ⟨0, ☆⟩, ⟨0, 0⟩ }

Kõikide naturaalarvude hulga Cartesiuse ruut

$$
\begin{array}{l}
N^{(2)} = \{\langle 0,0\rangle\ \langle 0,1\rangle\ \langle 0,2\rangle\ \langle 0,3\rangle\ \langle 0,4\rangle\ \langle 0,5\rangle\ \langle 0,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \langle 1,0\rangle\ \langle 1,1\rangle\ \langle 1,2\rangle\ \langle 1,3\rangle\ \langle 1,4\rangle\ \langle 1,5\rangle\ \langle 1,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \langle 2,0\rangle\ \langle 2,1\rangle\ \langle 2,2\rangle\ \langle 2,3\rangle\ \langle 2,4\rangle\ \langle 2,5\rangle\ \langle 2,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \langle 3,0\rangle\ \langle 3,1\rangle\ \langle 3,2\rangle\ \langle 3,3\rangle\ \langle 3,4\rangle\ \langle 3,5\rangle\ \langle 3,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \langle 4,0\rangle\ \langle 4,1\rangle\ \langle 4,2\rangle\ \langle 4,3\rangle\ \langle 4,4\rangle\ \langle 4,5\rangle\ \langle 4,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \langle 5,0\rangle\ \langle 5,1\rangle\ \langle 5,2\rangle\ \langle 5,3\rangle\ \langle 5,4\rangle\ \langle 5,5\rangle\ \langle 5,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \langle 6,0\rangle\ \langle 6,1\rangle\ \langle 6,2\rangle\ \langle 6,3\rangle\ \langle 6,4\rangle\ \langle 6,5\rangle\ \langle 6,6\rangle\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
\qquad \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ldots\ \ \}
\end{array}
$$

Kahe hulga Cartesiuse korrutised

Määratlus. Hulkade A ja B ***Cartesiuse korrutiseks*** nimetame hulka $\{\langle\alpha,\beta\rangle \mid (\alpha\in A)\&(\beta\in B)\}$,

mida tähistame kirjutisega $A\times B$.

Seega - $A\times B = \{\langle\alpha,\beta\rangle \mid (\alpha\in A)\&(\beta\in B)\}$

Näide 1. Kui $H_1=\{O, □\}$ ja $H_2=\{\$,£,¤\}$, siis

$H_1\times H_2 = \{\langle O,\$\rangle,\langle O,£\rangle,\langle O,¤\rangle,\langle □,\$\rangle,\langle □,£\rangle,\langle □,¤\rangle\}$

Näide 2. Kui $A=\{1,2\}$ ja $B=\{x,y,z\}$, siis

$A\times B=\{\langle 1,x\rangle, \langle 1,y\rangle, \langle 1,z\rangle, \langle 2,x\rangle, \langle 2,y\rangle, \langle 2,z\rangle\}$

$B\times A=\{\langle x,1\rangle, \langle x,2\rangle, \langle y,1\rangle, \langle y,2\rangle, \langle z,1\rangle, \langle z,2\rangle\}$

Järeldus. **Üldjuhul** $A\times B \neq B\times A$

Unaarsete predikaatide määratlus

- **Ühekohaliseks predikaadiks** hulgas H ehk hulga H **elementide omaduseks** nimetame hulga H suvalist osahulka Ω. ***Kui*** Ω tähistab hulga H elementide mingit omadust ja α tähistab hulga H mingit elementi, ***siis***
- $\Omega(\alpha) \int$ elemendil α on omadus Ω
- elemendil α on omadus $\Omega \int \alpha \in \Omega$

Omaduste näited

- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust P, mille korral P(m) ∫ element m on algarv. Sellisel juhul P={2,3,5}
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust T, mille korral T(u) ∫ element u on kordarv. Sellisel juhul T={4,6}
- Vaatleme hulka {1,2,3,4,5,6} ning omadust F, mille korral F(t) ∫ element t on Fibonacci arv.

  Sellisel juhul Q={1,2,3,5}
- Vaatleme hulka {} ning omadust K, mille korral K(e) ∫ element e on ajanäitaja.
  Sellisel juhul K= {}

Binaarsete predikaatide määratlus

- **2-kohaliseks predikaadiks** ehk **2-kohaliseks seoseks** ehk **binaarseks predikaadiks hulkade** H_1, H_2 elementide vahel nimetame hulga $H_1 \times H_2$ suvalist osahulka

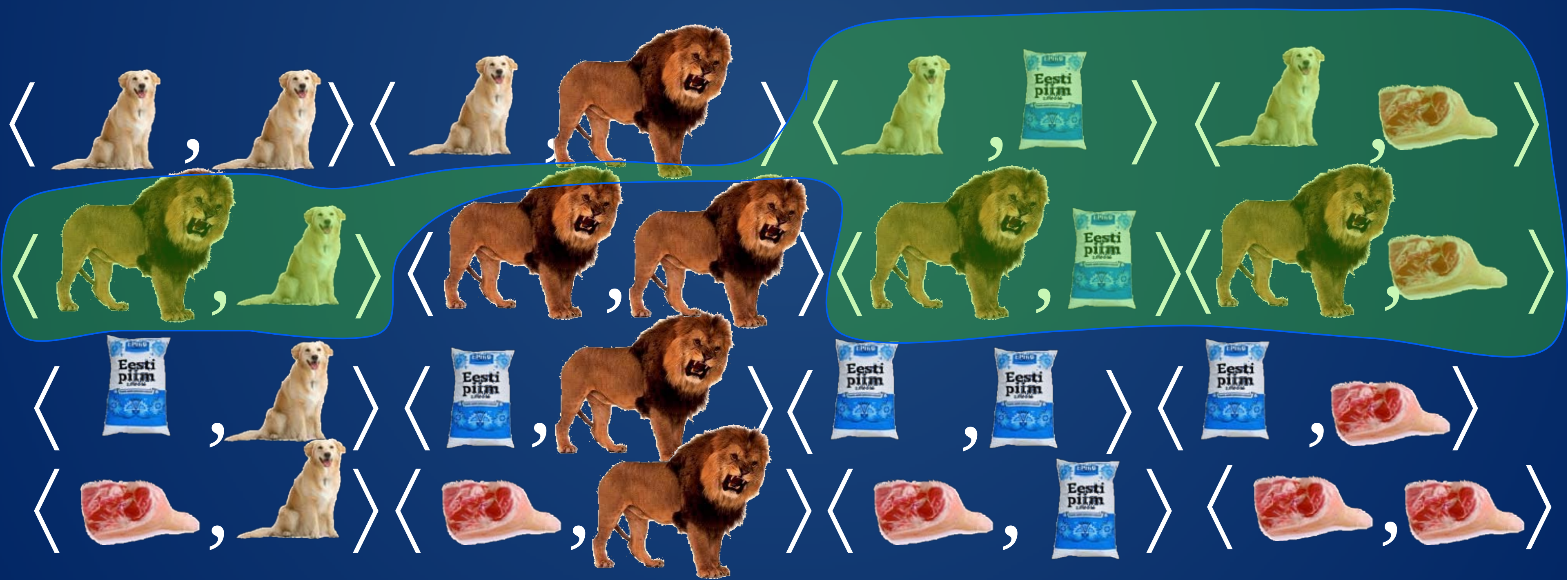
Kui Φ tähistab mingit binaarset seost H_1, H_2 elementide vahel ja α_1, α_2 tähistavad mingeid elemente vastavatest hulkadest, **siis**

- $\Phi(\alpha_1, \alpha_2) \int \alpha_1$ ja α_2 on seoses Φ
- α_1 ja α_2 on seoses $\Phi \int$ **[**$\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle \in \Phi$**] & [**$\Phi \subseteq H_1 \times H_2$**]**

Teoreem. Iga binaarne seos kujutab endast järjestatud paaride mingit omadust.

Tõestus. Vaatleme hulkade H_1, H_2 elementide vahelist binaarset seost Φ. Kuna $\Phi \subseteq H_1 \times H_2$, siis on definitsiooni järgi tegemist hulga $H_1 \times H_2$ elementide ehk järjestatud paaride omadusega.

Binaarsete seoste näited I



Binaarsete seoste näited II

- Vaatleme hulka $\{\triangle, \diamondsuit, \bigcirc, \star, 0\}$ ja seost $\angle$, mille korral $\alpha \angle \beta \int \alpha$ on nurgelisem kui β.

  Sellisel juhul $\{\triangle, \diamondsuit, \bigcirc, \star, 0\} \times \{\triangle, \diamondsuit, \bigcirc, \star, 0\} =$

  $= \{ \langle\triangle, \triangle\rangle, \langle\triangle, \diamondsuit\rangle, \langle\triangle, \bigcirc\rangle, \langle\triangle, \star\rangle, \langle\triangle, 0\rangle,$

  $\langle\diamondsuit, \triangle\rangle, \langle\diamondsuit, \diamondsuit\rangle, \langle\diamondsuit, \bigcirc\rangle, \langle\diamondsuit, \star\rangle, \langle\diamondsuit, 0\rangle,$

  $\langle\bigcirc, \triangle\rangle, \langle\bigcirc, \diamondsuit\rangle, \langle\bigcirc, \bigcirc\rangle, \langle\bigcirc, \star\rangle, \langle\bigcirc, 0\rangle,$

  $\langle\star, \triangle\rangle, \langle\star, \diamondsuit\rangle, \langle\star, \bigcirc\rangle, \langle\star, \star\rangle, \langle\star, 0\rangle,$

  $\langle 0, \triangle\rangle, \langle 0, \diamondsuit\rangle, \langle 0, \bigcirc\rangle, \langle 0, \star\rangle, \langle 0, 0\rangle \}$ ja

$$\angle = \{\langle\triangle, \bigcirc\rangle, \langle\triangle, 0\rangle, \langle\diamondsuit, \triangle\rangle, \langle\diamondsuit, \bigcirc\rangle, \langle\diamondsuit, 0\rangle, \langle\star, \triangle\rangle, \langle\star, \diamondsuit\rangle, \langle\star, \bigcirc\rangle, \langle\star, 0\rangle\}$$

Seoste näited III

- Vaatleme hulkasid {△,◇,○,☆,0} ning {1,2,3,4,5,6} ja seost Ⓐ, mille korral αⒶβ ∫ α “teravate” nurkade arv on β.
Sellisel juhul {△,◇,○,☆,0} × {1,2,3,4,5,6} =
= { ⟨△, 1⟩, ⟨△, 2⟩, ⟨△, 3⟩, ⟨△, 4⟩, ⟨△, 5⟩, ⟨△, 6⟩,
⟨◇, 1⟩, ⟨◇, 2⟩, ⟨◇, 3⟩, ⟨◇, 4⟩, ⟨◇, 5⟩, ⟨◇, 6⟩,
⟨○, 1⟩, ⟨○, 2⟩, ⟨○, 3⟩, ⟨○, 4⟩, ⟨○, 5⟩, ⟨○, 6⟩,
⟨☆, 1⟩, ⟨☆, 2⟩, ⟨☆, 3⟩, ⟨☆, 4⟩, ⟨☆, 5⟩, ⟨☆, 6⟩,
⟨0, 1⟩, ⟨0, 2⟩, ⟨0, 3⟩, ⟨0, 4⟩, ⟨0, 5⟩, ⟨0, 6⟩ } ja

Ⓐ = {⟨△, 3⟩, ⟨◇, 4⟩, ⟨☆, 5⟩}

Erikokkulepe binaarsete seoste jaoks

- Kui S on binaarse seose sümbol ja mingite x ning y korral S(x,y), siis reeglina kirjutatakse S(x,y) asemel xSy
- Näiteks ei kirjutata $=(\alpha,\beta)$ – vaid $\alpha=\beta$; ei kirjutata $\in(X,Y)$ – vaid $X\in Y$; ei kirjutata $\perp(s,t)$ – vaid $s\perp t$

- Kuid on ka **erandeid!** **Jagajaks olemist väljendava seose** korral – mida tähistatakse kirjutisega **div** –tähistab seda, et arv m on arvu n jagajaks, kirjutis **div(m,n)** ja mitte kirjutis **m div n** (näiteks **div(2,6)**, mitte **2 div 6**)

Samade tähiste kasutamisest

- Sageli kasutatakse omaduste ning seoste tähistamiseks samu sümboleid ja nimetusi, kuigi formaalselt võttes on tegemist erinevatest korteežidest koosnevate seostega. **Niisugust asja võimaldab** tähiseks-tähenduseks olemise **seose ∫ mitteühesus.**
- **Näide.** Vaatleme kaht hulka: **{0,1,2}** ja **{4,5,6,7}.** Moodustame mõlema hulga jaoks binaarsed seosed: {⟨0,1⟩, ⟨0,2⟩, ⟨1,2⟩} ja {⟨4,5⟩, ⟨4,6⟩, ⟨4,7⟩, ⟨5,6⟩, ⟨5,7⟩, ⟨6,7⟩}.

Neis seostes pole ainsatki ühist paari. Samas on üsna ootuspärane, et mõlema korral kasutatakse **ühte ja sama tähist**, milleks on **<** .

- **Märkus.** **Samanimeliste omaduste ja seostega** on meil tegemist tavaliselt siis, **kui tegemist on mõne "avarama" omaduse või seose "kitsamate" osadega.**

Binaarsed funktsionaalsed seosed

Määratlus. Mingit 2-kohalist seost **F** nimetatakse **kahe**-kohaliseks funktsionaalseks seoseks ehk (NB!) **ühe**-kohaliseks funktsiooniks, kui selle seose kõikide sidumite viimased elemendid on esimeste poolt üheselt määratud ehk lühemalt: kui $\langle x,y'\rangle \in \mathbf{F}$ ning $\langle x,y''\rangle \in \mathbf{F}$, siis $y' = y''$.

Kokkuleppeliselt kasutatakse järgmist tähistusviisi:

- $\mathbf{F}(x)=y \int \langle x,y\rangle \in \mathbf{F}$
- $\mathbf{F}(x) \int (\exists y)[\ \mathbf{F}(x)=y\ \&\ \langle x,y\rangle \in \mathbf{F}\ ]$

Funktsiooni F määramispiirkonnaks nimetatakse hulka $\mathrm{dom}\ F = \{\ x \mid (\exists y)[\mathbf{F}(x)=y]\ \}$

Funktsiooni F väärtuste piirkonnaks nimetatakse hulka $\mathrm{rng}\ F = \{\ y \mid (\exists x)[\mathbf{F}(x)=y]\ \}$

Unaarsete funktsioonide näiteid

- Kahekohaline seos F, mille korral F(x,t) ∫ x isa on t **on** ühekohaline funktsioon
- Kahekohaline seos P, mille korral

  P(x,c) ∫ x on c vanaisa **ei ole** ühekohaline funktsioon
- Kahekohaline seos R, mille korral

  R(u,w) ∫ arvu u ruut võrdub arvuga w

  on ühekohaline funktsioon
- Kahekohaline seos D, mille korral

  D(m,n) ∫ arv m jagub arvuga n

  ei ole ühekohaline funktsioon

Vastavused

Määratlus 1. Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vahelist seost F nimetame **üheseks vastavuseks**, kui on täidetud järgmised tingimused:

- Iga element hulgast H_1 on seoses F täpselt ühe sobiva elemendiga hulgast H_2
- Iga element hulgast H_2 on seoses F mingi sobiva elemendiga hulgast H_1

Määratlus 2. Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vahelist seost F nimetame **üks-üheseks vastavuseks**, kui on täidetud järgmised tingimused:

- Iga element hulgast H_1 on seoses F täpselt ühe sobiva elemendiga hulgast H_2
- Iga element hulgast H_2 on seoses F täpselt ühe sobiva elemendiga hulgast H_1

Vastavused ja unaarsed funktsioonid

<u>Teoreem 1.</u> Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vaheline ***ühene*** vastavus F on seos, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

- dom $F = H_1$
- rng $F = H_2$

<u>Teoreem 2.</u> Kahe hulga H_1 ning H_2 elementide vaheline ***üks-ühene*** vastavus F on seos, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

- dom $F = H_1$
- rng $F = H_2$
- kui $p \neq q$, siis $F(p) \neq F(q)$

Vastavuste näiteid

- Hulgad {△,◇,○,☆,0} ning {1,2,3,4,5,6} **ei ole** üheses vastavuses
- Hulgad {0,1,2,3,4,5,6,7,8, …} ja {0,2,4,6,8, …} **on** üks-üheses vastavuses
- Kõikide naturaalarvude hulk ja kõikide reaalarvude hulk **ei ole** üks-üheses vastavuses
- Kõikide naturaalarvude hulk N ja hulk {0,1} **on** üheses vastavuses (võtame $F(n)=[1+(-1)^n]:2$)
- Kõikidest naturaalarvudest moodustatud järjestatud paaride hulk N×N ja kõikide naturaalarvude hulk N **on** üks-üheses vastavuses (võtame $F(x,y)=c^2(x,y)$)

Binaarsete seoste omaduste näiteid I

- **Vaatleme hulka H ja binaarset seost R selle hulga elementide vahel**
- R on **refleksiivne** hulgal H, kui $(\forall \alpha \in H)[\alpha R \alpha]$
- Paralleelsuse seos on **refleksiivne** kõikide sirgete hulgal
- R on **mitterefleksiivne** hulgal H, kui $\neg(\forall \alpha \in H)[\alpha R \alpha]$
- Seos ® arvude hulgas, mille korral m®w ∫ m ruut on w – on **mitterefleksiivne:** 0®0, 1®1, kuid ¬2®2, ¬3®3
- R on **täiesti mitterefleksiivne** hulgal H, kui $(\forall \alpha \in H)\neg[\alpha R \alpha]$
- **Ristseisu seos ⊥ kõikide sirgete hulgal on täiesti mitterefleksiivne**

Binaarsete seoste omaduste näiteid II

- R on **sümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall \alpha\beta \in H)[\alpha R\beta \supset \beta R\alpha]$
- Ristseisu seos $\perp$ on sümmeetriline kõikide sirgete hulgal
- R on **mittesümmeetriline** hulgal H, kui $\neg(\forall \alpha\beta \in H)[\alpha R\beta \supset \beta R\alpha]$
- Seos ❤ on mittesümmeetriline kõikide inimeste hulgal
- R on **täiesti mittesümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall \alpha\beta \in H)\neg[\alpha R\beta \supset \beta R\alpha]$
- **Seos $<$ on täiesti mittesümmeetriline arvude hulgal**

Binaarsete seoste omaduste näiteid III

- Seos R on **antisümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)[(\alpha R\beta \;\&\; \beta R\alpha) \supset \alpha=\beta]$
- Seos $\leq$ on **antisümmeetriline** kõikide arvude hulgal
- Seos R on **mitteantisümmeetriline** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\in H)[(\alpha R\beta \;\&\; \beta R\alpha) \supset \alpha=\beta]$
- Seos $\square$, mille korral $m\square w \int |m|$ ja $|w|$ on võrdsed on **mitteantisümmeetriline** kõikide täisarvude hulgal: näiteks $(-3)\square(+3)$ ja $(+3)\square(-3)$, kuid $(-3) \neq (+3)$; kui aga m ja w on positiivsed, siis $(m\square w \;\&\; w\square m) \supset m=w$
- Seos R on **täiesti mitteantisümmeetriline** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\in H)\neg[(\alpha R\beta \;\&\; \beta R\alpha) \supset \alpha=\beta]$
- **Ristseisu seos $\perp$ kõikide sirgete hulgal on täiesti mitteantisümmeetriline**

Binaarsete seoste omaduste näiteid IV

- Seos R on **transitiivne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\gamma\in H)[(\alpha R\beta \;\&\; \beta R\gamma) \supset \alpha R\gamma]$
- Paralleelsuse seos on **transitiivne** kõikide sirgete hulgal
- Seos R on **mittetransitiivne** hulgal H, kui $\neg(\forall\alpha\beta\gamma\in H)[(\alpha R\beta \;\&\; \beta R\gamma) \supset \alpha R\gamma]$
- Seos ❤ on **mittetransitiivne** kõikide inimeste hulgal
- Seos R on **täiesti mittetransitiivne** hulgal H, kui $(\forall\alpha\beta\gamma\in H)\neg[(\alpha R\beta \;\&\; \beta R\gamma) \supset \alpha R\gamma]$
- Isaks olemise seos ♔ on **täiesti mittetransitiivne** kõikide inimeste hulgal

Binaarsete seoste omaduste näiteid V

- Seos R on **ekvivalentsusseos** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & sümmeetriline**
- Seos || on **ekvivalentsuse seos** kõikide sirgete hulgal
- Seos R on **mitte-ekvivalentsusseos** hulgal H, kui R on hulgal H **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ $\vee$ **mittesümmeetriline**
- Seos $\perp$ on **mitte-ekvivalentsuse** seos kõikide sirgete hulgal (kuna $\perp$ on mitterefleksiivne)

Binaarsete seoste omaduste näiteid VI

- Seos R on **osalise järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne &**
  & antisümmeetriline
- Seos $\leq$ on **osalise järjestuse seos** kõikide arvude hulgal
- Seos R **ei ole osalise järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal H **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ **mitte-antisümmeetriline**
- Seos $\perp$ **ei ole osalise järjestuse seos** kõikide sirgete hulgal (kuna $\perp$ on mitterefleksiivne)

Binaarsete seoste omaduste näiteid VII

- R on **totaalne** hulgal H, kui $(\forall \alpha\beta \in H)[\alpha R \beta]$
- Ühise punkti olemasolu seos Ⓟ on **totaalne** hulgal {X,Y,Z}, mille elementideks on ruumi ristkoordinaadistiku moodustavad kolm sirget
- R on **mittetotaalne** hulgal H, kui $\neg(\forall \alpha\beta \in H)[\alpha R \beta]$
- Seos ❤ on **mittetotaalne** kõikide inimeste hulgal
- R on **kvaasitotaalne** ehk **lineaarne** hulgal H, kui $(\forall \alpha\beta \in H)[\alpha R \beta \vee \beta R \alpha \vee \alpha = \beta]$
- Seos $<$ on **lineaarne** kõikide arvude hulgal
- R on **mitte-kvaasitotaalne** ehk **mittelineaarne** hulgal H, kui $\neg(\forall \alpha\beta \in H)[\alpha R \beta \vee \beta R \alpha \vee \alpha = \beta]$
- Seos on **mittelineaarne** kõikide sirgete hulgal

Binaarsete seoste omaduste näiteid VIII

- Seos R on **lineaarse järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & antisümmeetriline & kvaasitotaalne**
- Seos $\leq$ on **lineaarse järjestuse seos** kõikide arvude hulgal
- Seos R **ei ole lineaarse järjestuse seos** hulgal H, kui R on hulgal **mitterefleksiivne** $\vee$ **mittetransitiivne** $\vee$ **mitte-antisümmeetriline** $\vee$ **mitte-kvaasitotaalne**
- Seos $<$ **ei ole lineaarse järjestuse seos** kõikide arvude hulgal (kuna $<$ on mitterefleksiivne)

Binaarsete seoste omaduste näiteid IX

- Seos R **rahuldab minimaalse elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt – **rahuldab minitingimust**, kui $(\forall B \subseteq H)[B \neq \emptyset \supset (\exists \mu \in B)(\forall \alpha \in B)[\alpha \neq \mu \supset \neg \alpha R \mu]\,]$ kusjuures elementi μ, mille korral $(\exists \mu \in B)(\forall \alpha \in B)[\alpha \neq \mu \supset \neg \alpha R \mu]$ nimetame **osahulga B minimaalseks elemendiks seose R mõttes**
- Seos $\leq$ **rahuldab minitingimust** kõikide naturaalarvude hulgal
- Seos R **ei rahulda minimaalse elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt – **ei rahulda minitingimust**, kui $\neg(\forall B \subseteq H)[B \neq \emptyset \supset (\exists \mu \in B)(\forall \alpha \in B)[\alpha \neq \mu \supset \neg \alpha R \mu]\,]$
- Seos $\leq$ **ei rahulda minitingimust** kõikide ratsionaalarvude hulgal kuna näiteks osahulgal {1, ½, ¼, ⅛, …} pole minimaalset elementi

Binaarsete seoste omaduste näiteid X

- Seos R **rahuldab esimese elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt **rahuldab esitingimust**, kui $(\forall B \subseteq H)[B \neq \emptyset \supset (\exists \varepsilon \in B)(\forall \alpha \in B)[\varepsilon R \alpha]\ ]$ kusjuures elementi **ε**, mille korral $(\exists \varepsilon \in B)(\forall \alpha \in B)[\varepsilon R \alpha]$ nimetame **osahulga B esimeseks elemendiks seose R mõttes**
- Seos ≤ **rahuldab esitingimust** kõikide naturaalarvude hulgal
- Seos R **ei rahulda esimese elemendi olemasolu tingimust** hulgal H ehk lühemalt **ei rahulda esitingimust**, kui $\neg(\forall B \subseteq H)[B \neq \emptyset \supset (\exists \varepsilon \in B)(\forall \alpha \in B)[\varepsilon R \alpha]\ ]$
- Seos Ⓣ, mille korral mⓉn ∫ m on n teguriks **ei rahulda esitingimust** kõikide ühest suuremate naturaalarvude hulgal (kuigi samas rahuldab minitingimust sellel hulgal)

Binaarsete seoste omaduste näiteid XI

- Seos R on **täieliku järjestuse seoseks** hulgal H, kui R on hulgal H **refleksiivne & transitiivne & antisümmeetriline & kvaasitotaalne & rahuldab esitingimust**
- Seos $\leq$ on **täieliku järjestuse seoseks** kõikide naturaalarvude hulgal N
- Seos R **ei ole täieliku järjestuse seoseks** hulgal H, kui R on hulgal H **mitterefleksiivne $\vee$ mittetransitiivne $\vee$ mitte-antisümmeetriline $\vee$ mitte-kvaasitotaalne $\vee$ ei rahulda esitingimust**
- Seos $\leq$ **ei ole täieliku järjestuse seoseks** kõikide reaalarvude hulgal (kuna näiteks osahulgas $\{1, ½, ¼, ⅛, \ldots\}$ **pole esimest**)

Zermelo teoreem:

Iga mittetühja hulga H korral leidub selline seos R, mis on **täieliku järjestuse seoseks** hulgal H

J. von Neumann
(1903 – 1957)

John von Neumanni teoreem.
Iga ordinaalarv, mis pole nullordinaal (sh iga positiivne naturaalarv) on täielikult järjestatud osahulgaks olemise seosega $\subseteq$.

Binaarsete seoste omaduste näiteid XII

- Seost R nimetame **vasak-lõplikuks** hulgal H, kui selle hulga **iga** elemendi α korral **leidub vaid lõplik arv** hulga H selliseid elemente β, mille puhul $\beta R \alpha$
- Seos Ⓣ, mille korral mⓉn ∫ m on n teguriks **on vasak-lõplik** kõikide positiivsete naturaalarvude hulgal
- Seost R nimetame **mitte-vasak-lõplikuks** hulgal H, kui selle hulga **mõne** elemendi α korral **leidub lõputul arvul** hulga H selliseid elemente β, mille puhul $\beta R \alpha$
- Seos $<$ on **mitte-vasak-lõplik** kõikide täisarvude hulgal

Binaarsete seoste omaduste näiteid XIII

- Seos R on **regulaarne** ehk **fundeeritud** hulgal H, kui ***pole olemas*** niisugust hulga H elementide jada $x_0,x_1,\ldots x_m,x_{m+1},\ldots,$ milles … $x_{m+1}Rx_m$, … , x_2Rx_1, x_1Rx_0 ja seejuures **lõpmata paljudel juhtudel mõned "naabritest" erinevad teineteisest (st, et** $x_m \neq x_{m+1}$**)**.
- Isaks olemise seos ♔ on **regulaarne** ehk **fundeeritud** kõikide inimeste hulgal
- Seos R on **mitteregulaarne** ehk **mittefundeeritud** hulgal H, leidub niisugune hulga H elementide jada, milles on **lõpmata palju üksteisest erinevaid elemente** $\mathbf{x_m}$ ja seejuures $\ldots x_{m+1}Rx_m,\ldots,x_2Rx_1$, x_1Rx_0.
- Seos $<$ on **mitteregulaarne** kõikide täisarvude hulgal, sest näiteks $\ldots -(m+1) < -m, \ldots, -2 < -1, -1 < 0$

Seose $\leq$ fundeeritus hulgal N

Teoreem. Seos "väiksem või võrdne" rahuldab fundeerituse tingimust kõikide naturaalarvude hulgal. St, et ***pole olemas*** niisugust hulga N elementide jada $x_0, x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots,$ milles … $x_{m+1} \leq x_m,$ … , $x_2 \leq x_1$, $x_1 \leq x_0$ ja seejuures **lõpmata paljudel juhtudel mõned "naabritest" erinevad teineteisest (st, et $x_m \neq x_{m+1}$).**

Tõestuse idee. Definitsiooni kohaselt $p \leq q \int (p<q \vee p \neq q)$. $p<q \int p \in q$. Kui antud teoreemi väide poleks õige, siis peaks leiduma lõputu "ahel" $\ldots \in x_n \in x_m \in \ldots \in x_k \in x_j \in \ldots \in x_0$
See aga on vastuolus seose $\in$ fundeeritusega (vt regulaarsust)

Binaarsete seoste omaduste näiteid XIV

- Seos R rahuldab **induktsiooni tingimust** hulgal H, kui hulga H elementide suvalise omaduse M korral $(\forall y \in H)[(\forall x \in H)((xRy \& x \neq y) \supset M(x)) \supset M(y)] \supset (\forall z \in H)M(z)$ ehk "enam sõnade abil" – **kui** hulga H iga elemendi y korral korral sellest, et kõikidel (seose R mõttes) eelnevatel elementidel on omadus M järeldub, et ka elemendil y on see omadus, **siis** evivad omadust M kõik hulga H elemendid (tuletame meelde, et omaduse evimine oli samaväärne teatavasse osahulka kuulumisega)
- Seos $\leq$ rahuldab **induktsiooni tingimust** kõikide naturaalarvude hulgal
- Seos $\leq$ **ei rahulda induktsiooni tingimust** kõikide täisarvude hulgal (kui näiteks M(b) ∫ b on negatiivne)

IMF-teoreem (Lorents 2001)

Järgmised tingimused on loogiliselt ekvivalentsed:

- Induktsiooni tingimus
- Minimaalsuse tingimus
- Fundeerituse tingimus

Induktsiooni ja IMF teoreemi kasutamise näide

- Vaatleme omadust: **$P(w) \int 0+\ldots+w = w(w+1):2$**
- Tõestame, et see omadus on kõikide naturaalarvude hulga N igal elemendil.
- Näitame, et seos $\leq$, rahuldab **induktsiooni tingimust** hulgal N.
- Pole raske veenduda, et seos $\leq$ rahuldab fundeerituse tingimust hulgal N (st et igale naturaalarvule m eelneb selle seose mõttes vaid lõplik kogus erinevaid naturaalarve). Nüüd rakendame IMF teoreemi, mille kohaselt seos ***rahuldab*** $\leq$ mistahes omaduse M (st ka siis kui, M=P) puhul ***tingimust***

$$(\forall y\in N)[(\forall x\in N)((x\leq y\&x\neq y)\supset M(x))\supset M(y)] \supset (\forall z\in H)M(z)$$

ehk "enam sõnade abil" – **kui** hulga H iga elemendi y korral sellest, et kõikidel (seose $\leq$ mõttes) eelnevatel elementidel on omadus M järeldub, et elemendil y on samuti see omadus, **siis** evivad omadust M kõik hulga H elemendid (tuletame meelde, (1) et omaduse evimine oli samaväärne teatavasse osahulka kuulumisega ja (2), et see kehtib ka siis, kui M=P)

- Veendume, et ***iga y korral*** $(\forall x\in N)((x\leq y\&x\neq y)\supset P(x))\supset P(y)$. Paneme tähele, et see on õige, kui y on 0 (sest y=0 korral $0=0(0+1):2$). Olgu nüüd y>0 ja olgu et iga x korral $((x\leq y\&x\neq y)\supset P(x))$ ehk – kui mingi arv x on n-ö rangelt väiksem arvust y, siis 0+…+x=x(x+1):2. Nii on ka y-1 korral. St, et 0+…+(y-1)=(y-1)(y-1+1):2. Järelikult P(y) ehk 0+…+y=[0+…+(y-1)]+y=[(y-1)y:2]+y=y(y+1):2. Järelikult ***iga y korral*** $(\forall x\in N)((x\leq y\&x\neq y)\supset P(x))\supset P(y)$. ***Järelikult*** $(\forall z\in N)P(z)$.