LOOGILISED KONSTRUKTSIOONID (I)

LAUSETE ARVUTUSE TASE

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 1

Lausete arvutuse tähestik

Määratlus. Lausete arvutuse tähestiku ehk alfabeedi A_P elementideks on

- **Lausemuutujad** $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$.
- **Loogika sümbolid** $\neg, \&, \vee, \supset, \Leftrightarrow$.
- **Abisümbolid** (,) .

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 2

Lausete arvutuse sõnad

Määratlus 1. Lausete arvutuse tähestiku iga sümbolit ja iga korteeži, mille positsioneeritud elementideks on alfabeedi A_P elemendid, nimetame **alfabeedi A_P sõnaks** ehk lihtsamalt – **sõnaks.** "Ühesümbolilise" sõna pikkus on 1. Ülejäänud sõnade pikkuseks on vastava korteeži pikkus.

- **Kokkulepe.** Kui $\langle a,b,\dots,c\rangle$ on sõna, siis **ab…c ⨍ $\langle a,b,\dots,c\rangle$**

Määratlus 2. Kui **ab…c** on sõna ja **xy…z** on sõna, siis sõna **ab…cxy…z** on sõnade **ab…c** ja **xy…z** **konkatenatsioon.**

- **Kokkulepe.** **ab…c©xy…z = ab…cxy…z $\langle a,b,\dots,c\rangle$©$\langle x,y,\dots,z\rangle$ = $\langle a,b,\dots,c,x,y,\dots,z\rangle$**

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 3

Lausete arvutuse sõnade c-struktuur

- **Määratlus.** Olgu L_{AP} lausete arvutuse alfabeedi A_P kõikide sõnade hulk. Süsteemi $\langle L_{AP} ; © \rangle$ nimetame **alfabeedi A sõnade konkatenatsioonistruktuuriks** ehk lühemalt **c-struktuuriks.**
- **Teoreem.** Kui $\langle L_{AP}; © \rangle$ on lausete arvutuse alfabeedi A_P c-struktuur, siis selle baasiks on lausete arvutuse alfabeet A_P.

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 4

Lausete arvutuse valemite moodustamise seosed

- **Eituse moodustamise seos [¬],** kus $[\neg] = \{ \langle\alpha,\beta\rangle \mid \alpha\in S_P \;\&\; \beta\in S_P \;\&\; \beta=(\neg\alpha) \}$
- **Konjunktsiooni moodustamise seos [&],** kus $[\&] = \{ \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle \mid \alpha\in S_P \;\&\; \beta\in S_P \;\&\; \gamma\in S_P \;\&\; \gamma=(\alpha \;\&\; \beta) \}$
- **Disjunktsiooni moodustamise seos [∨],** kus $[\vee] = \{ \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle \mid \alpha\in S_P \;\&\; \beta\in S_P \;\&\; \gamma\in S_P \;\&\; \gamma=(\alpha \vee \beta) \}$
- **Implikatsiooni moodustamise seos [⊃],** kus $[\supset] = \{ \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle \mid \alpha\in S_P \;\&\; \beta\in S_P \;\&\; \gamma\in S_P \;\&\; \gamma=(\alpha \supset \beta) \}$
- **Ekvivalentsi moodustamise seos [⇔],** kus $[\Leftrightarrow] = \{ \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle \mid \alpha\in S_P \;\&\; \beta\in S_P \;\&\; \gamma\in S_P \;\&\; \gamma=(\alpha \Leftrightarrow \beta) \}$

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 5

Lausete arvutuse valemid

- **Määratlus.** Olgu $\mathbf{L_{AP}}$ lausete arvutuse alfabeedi A_P kõikide sõnade hulk. Lausete arvutuse valemiteks on (1) kõik lausemuutujad ehk sümbolitest X_1, X_2, … moodustatud ühetähelised sõnad (2) struktuuri $\langle S_P ; [\neg], [\&], [\vee], [\supset], [\Leftrightarrow] \rangle$ kõik selliste konstruktsioonide tulemused, mille algkomponentideks on lausemuutujad (st sümbolid $X_1, X_2, \ldots , X_n, \ldots$).
- **Teoreem.** Kui F_P on **lausete arvutuse kõikide valemite hulk**, siis hulk $\{X_1, X_2, \ldots , X_n, \ldots\}$ moodustab struktuuri $\langle F_P ; [\neg], [\&], [\vee], [\supset], [\Leftrightarrow] \rangle$ baasi.

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 6

Lausete arvutuse valemi konstruktsiooni puukujulise esituse näide

- $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X_1}{(\neg X_1)}[\neg] \quad \dfrac{X_2}{(\neg X_2)}[\neg]}{((\neg X_1)\&(\neg X_2))}[\&] \qquad \dfrac{\dfrac{X_1 \quad X_2}{(X_1 \vee X_2)}[\vee]}{(\neg(X_1 \vee X_2))}[\neg]}{(((\neg X_1)\&(\neg X_2)) \supset (\neg(X_1 \vee X_2)))}[\supset]$$

Märkus 1. Valemi konstruktsioon kujutab endast antud juhul selle valemi moodustamise käiku, mitte aga selle valemi tuletuse käiku ega samuti tõestuskäiku!

Märkus 2. Kui pole karta segadusi, siis jätame valemites edaspidi osa sulgudest kirjutamata. Kirjutades näiteks $((\neg X_1)\&(\neg X_2))$ asemele $(\neg X_1)\&(\neg X_2)$ või lausa $\neg X_1\&\neg X_2$.

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 7

Lausete arvutuse tuletusreeglid

- Tuletusreeglid on **seosed valemite hulgal.** Igas tuletusreeglisse kuuluvas valemite sidumis $\langle A_1,\dots A_k, B\rangle$ loetakse valemit B (vahetult) **tuletatavaks** ehk **tulenevaks** (vahetutest) **eeldustest** $A_1,\dots A_k$.

Määratlus. **Lausete arvutuse tuletusreegliteks** on

- $\supset^- = \{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle \mid \alpha\in F_P \;\&\; \beta\in F_P \;\&\; \gamma\in F_P \;\&\; (\beta=(\alpha\supset\gamma))\}$
- $\&^+ = \{\langle\alpha,\beta\rangle \mid \alpha\in F_P \;\&\; \beta\in F_P \;\&\; \gamma\in F_P \;\&\; \delta\in F_P \;\&$
  $\& \; (\alpha=(\neg(\gamma\supset(\neg\delta)))) \;\&\; (\beta=(\gamma\&\delta))\}$
- $\vee^+ = \{\langle\alpha,\beta\rangle \mid \alpha\in F_P \;\&\; \beta\in F_P \;\&\; \gamma\in F_P \;\&\; \delta\in F_P \;\&$
  $\& \; (\alpha=((\neg\gamma)\supset\delta)) \;\&\; (\beta=(\gamma\vee\delta))\}$
- $\Leftrightarrow^+ = \{\langle\alpha,\beta\rangle \mid \alpha\in F_P \;\&\; \beta\in F_P \;\&\; \gamma\in F_P \;\&\; \delta\in F_P \;\&$
  $\& \; (\alpha=((\gamma\supset\delta) \;\&\; (\delta\supset\gamma))) \;\&\; (\beta=(\gamma\Leftrightarrow\delta))\}$

Märkus. Kui võimalik – jätame osa sulgudest ära.

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 8

Lausete arvutuse aksioomid

- Lausete arvutuse aksioomid on valemid, mida **loetakse *a priori* tõestatuteks.** Kõik ülejäänud lausete arvutuse tõestatavad valemid peavad olema neist tuletatavad lausete arvutuse tuletusreeglite abil.

Määratlus. Kui Z, Y ja W on lausete arvutuse valemid, siis lausete arvutuse **aksioomideks** on valemid

- $Z\supset(Y\supset Z)$
- $(Z\supset(Y\supset W))\supset((Z\supset Y)\supset(Z\supset W))$
- $(\neg Z\supset\neg Y)\supset(Y\supset Z)$

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 9

Lausete arvutuse teoreemid

Määratlus. **Lausete arvutuse teoreemideks** ehk **tõestatud valemiteks** on
(1) kõik lausete arvutuse aksioomid
(2) struktuuri $\langle F_P ; \supset^-, \&^+, \vee^+, \Leftrightarrow^+ \rangle$ kõik selliste konstruktsioonide tulemused, mille algkomponentideks on lausete arvutuse aksioomid. Kõnealust konstruktsiooni nimetatakse seejuures vastava **teoreemi tõestuseks.**

Teoreem. Kui Th_P on lausete arvutuse kõikide teoreemide hulk ja Ax_P on lausete arvutuse kõikide aksioomide hulk, siis Ax_P on struktuuri $\langle Th_P ; \supset^-, \&^+, \vee^+, \Leftrightarrow^+ \rangle$ baasiks.

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 10

Lausete arvutuse teoreemide tõestuste puukujuliste esituste näited

$$\dfrac{A\supset(A\supset A) \qquad \dfrac{A\supset((A\supset A)\supset A) \quad (A\supset((A\supset A)\supset A)) \supset (A\supset(A\supset A))\supset(A\supset A))}{(A\supset(A\supset A))\supset(A\supset A))}\,{\scriptstyle\supset -}}{A\supset A}\,{\scriptstyle\supset -}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg B \supset(\neg B \supset \neg B) \qquad \dfrac{\neg B\supset((\neg B\supset\neg B)\supset\neg B) \quad (\neg B\supset((\neg B\supset\neg B)\supset\neg B)\supset(\neg B\supset(\neg B\supset\neg B))\supset(\neg B\supset\neg B))}{(\neg B \supset(\neg B \supset \neg B))\supset(\neg B \supset \neg B))}\,{\scriptstyle\supset -}}{\neg B \supset \neg B}\,{\scriptstyle\supset -}}{B \vee \neg B}\,{\scriptstyle\vee +}$$

30/11/2011 (C) Peeter Lorents 11