KONSTRUKTSIOONID SÜSTEEMIDES

Konstrueerimine süsteemide raames

- Konstrueerimiseks ehk millegi korrakohaseks moodustamiseks on vaja mingite **asjade olemasolu**
- Juba olemasolevatest asjadest mõne teise asja moodustamiseks on vaja **asju seostada**
- Asjade seostamiseks on vaja **seoseid**
- Kui meil on ülevaade asjadest, millega soovime tegeleda ning nende asjade vahelistest seostest, siis on meil ju olemas mingi **asjade süsteem** ehk **struktuur**
- Kui konstrueerimine toimub mingi sobiva ning seejuures rangelt fikseeritud süsteemi ehk struktuuri raames, siis kõneleme **süsteemsest konstrueerimisest**, mille **tulemusteks** on süsteemsed ehk **struktuursed konstruktsioonid** ehk **asjad *koos* kogu oma moodustamise käiguga** (kõnealuse süsteemi raames)

Konstruktsioonid süsteemis $\langle H ; \Sigma \rangle$ (I)

Määratlus.

- Kui mingite elementide $e_1,\ldots,e_k,u \in H$ ning k+1-kohalise seose $R \in \Sigma$ korral õnnestub moodustada sidum $\langle e_1, e_2,\ldots,e_k,u \rangle \in R$ ehk seostada kõnealused elemendid omavahel seose R abil, siis ütleme, et
- **$R(e_1,\ldots,e_k,u)$ on konstruktsioon, mille tase on 1 ning sammude arv on samuti 1** ja mille
- **algkomponentideks on $e_1,\ldots,e_k$** ja mille
- **tulemuseks on u**

Märkus. Äsjamääratletud konstruktsiooni nimetatakse sageli **konstruktsioonisammuks** ehk **ühesammuliseks konstruktsiooniks** süsteemis ehk struktuuris $\langle H ; \Sigma \rangle$

Konstruktsioonid süsteemis $\langle H ; \Sigma \rangle$ (II)

- <u>**Määratluse jätk.**</u>
- **Kui** $K_1, K_2,\ldots,K_m$ on konstruktsioonid, mille tasemed on vastavalt $v_1,\ldots,v_m$ **ja** sammude arvud on vastavalt $s_1,\ldots,s_m$ **ja** mille algkomponentideks on vastavalt $e_{1,1},\ldots,e_{1,n(1)}$, $e_{2,1},\ldots,e_{2,n(2)}$, … …, $e_{m,1},\ldots,e_{m,n(m)}$ **ja** mille tulemusteks on vastavalt $u_1,\ldots,u_m$ **ja** kui mingi elemendi $r\in H$ ning $m+1$-kohalise seose $Q\in\Sigma$ korral $\langle u_1,\ldots,u_m,r\rangle\in Q$, **siis**
- **$Q(K_1, K_2,\ldots,K_m,r)$ on konstruktsioon, mille tase on $\max(v_1,\ldots,v_m)+1$ ja sammude arv on $s_1+\ldots+s_m+1$** ning mille
- **algkomponentideks on** konstruktsioonide $K_1, K_2,\ldots,K_m$ **kõik algkomponendid** $e_{1,1},\ldots,e_{1,n(1)}$, $e_{2,1},\ldots,e_{2,n(2)}$, … , $e_{m,1},\ldots,e_{m,n(m)}$ ja mille
- **tulemuseks on r**

Süsteemi ⟨ H ; Σ ⟩ konstruktsioonide esitused (I)

- Järgnevalt eeldame, et suudame vajaduse korral eristada hulkade elemente nende tähistest ning samuti eristada seoseid nende tähistest
- **Määratlus.** Kui tähiste $\alpha_1,\ldots,\alpha_k, \beta$ **tähendused** on vaadeldava süsteemi põhihulga **elementideks** ning tähise Φ **tähenduseks** on vaadeldava süsteemi signatuuri selline **seos**, mis seob omavahel tähiste $\alpha_1,\ldots,\alpha_k, \beta$ eelnimetatud tähendused, siis
- **$\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k, \beta)$ on 1-taseme konstruktsiooni kanooniliseks esituseks vaadeldavas süsteemis**, kusjuures vastava konstruktsiooni
- **algkomponentide kanoonilisteks esitusteks on $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$** ning
- **tulemuse kanooniliseks esituseks on β**

Süsteemi $\langle$ H ; Σ $\rangle$ konstruktsioonide esitused (II)

- **Määratlus.** **Kui** $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ on vaadeldavas süsteemis selliste konstruktsioonide kanoonilised esitused, mille tasemeist suurimaks on arv m **ja** mille tulemuste kanoonilisteks esitusteks on vastavalt $\delta_1, \ldots, \delta_n$ **ja** kui leiduvad selline tähis ρ, mille tähendus on põhihulga H element **ja** selline tähis Ψ, mille tähenduseks n+1-kohaline seos signatuurist Σ **ja** mille korral esituste $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tähendused ning tähise ρ tähendus on tähise Ψ tähenduseks olevas seoses, **siis**
- **$\Psi(\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \rho)$ on antud struktuuri m+1-taseme konstruktsiooni kanooniliseks esituseks**, mille korral
- **algkomponentide kanoonilisteks esitusteks on konstruktsioonide $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ algkomponentide kanoonilised esitused** ning
- **tulemuse kanooniliseks esituseks on ρ**

Süsteemi $\langle$ H ; Σ $\rangle$ konstruktsioonide esitused (III)

- **<u>Märkus 1.</u>** Tähiseks-tähenduseks olemise seose korral pole keelatud, et mõni asi võiks olla iseenese tähiseks ja tähenduseks. Seetõttu – **kui** pole karta segadusi – **siis võib** vahel (näiteks mõningate *sümbolitest moodustatud süsteemide* korral) konstruktsioonid ja nende kanoonilised esitused samastada
- **<u>Märkus 2.</u>** Kanooniliste esituste korral võib vajaduse ilmnemisel lubada traditsioonidest tulenevaid “kõrvalekaldeid” (reeglina kahe- või kolmekohaliste seoste kasutamise puhul)
- **<u>Märkus 3.</u>** Tähiseks-tähenduseks olemise seose transitiivsusele tuginedes võib konstruktsioonide esitustena käsitleda ka neid asju, mille tähendusteks on vastavate konstruktsioonide kanoonilised esitused

Süsteemi $\langle$ H ; Σ $\rangle$ konstruktsioonide esitused (IV)

- **Märkus 4.** Märkustes 1. ja 3. öeldut korrates juhime veelkord tähelepanu tähiseks-tähenduseks olemise seose omadustele, millest tulenevalt **võivad** konstruktsioonid ja nende (mitmed) esitused omavahel erineda.
  See asjaolu annab omakorda **võimaluse uurida vaadeldavat *konstruktsiooni* sobiva ning mugava *esituse* abil** (näiteks uurides looduses mõnda "väga suurt" – või vastupidi – "väga väikest" konstruktsiooni, saame seda "matemaatiliste sümbolitega kirjeldada", või seda hoopis "paberile joonistada", "ekraanile kuvada", või selle "mehaanilist mudelit ehitada ja katsetada" jne, jne)

Konstruktsioonisammude puukujuline esitamine

- Kui konstruktsioonisammu ehk ühesammulise konstruktsiooni kanooniline esitus on $R(b_1,\ldots,b_n,d)$, siis vastav puukujuline esitus on järgmise kujuga:

$$(R)\ \frac{b_1\ldots \quad \ldots b_n}{d} \qquad \text{ehk} \qquad \frac{b_1\ldots \quad \ldots b_n}{d}\ (R)$$

- **Märkus.** Puukujulise esituse juures *ei kasutata* "joone peal" paiknevate asjade eristamiseks komasid vaid paigutatakse nad joone peal üksteisest piisavalt kaugele

Konstruktsioonisammude jadakujuline esitamine

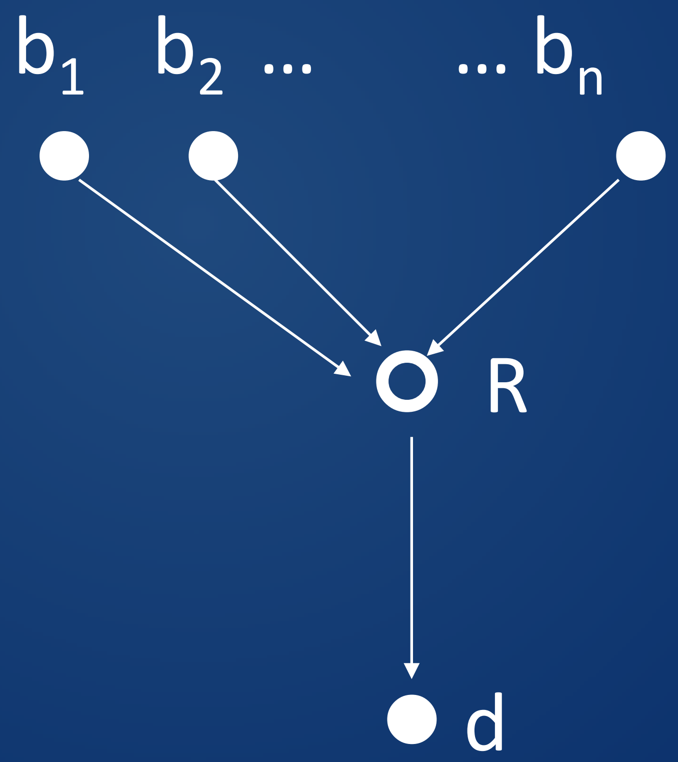
- Kui konstruktsioonisammu ehk ühesammulise konstruktsiooni kanooniline esitus on $R(b_1,\ldots,b_n,d)$, siis vastav jadakujuline esitus on järgmise kujuga:

$$b_1,\ldots,b_n \underset{(R)}{\vdash} d$$

- **Märkus.** Jadakujulise esituse juures kasutatakse eristamiseks komasid

Konstruktsioonisammude graafikujuline esitamine

- Kui konstruktsioonisammu ehk ühesammulise konstruktsiooni kanooniline esitus on $R(b_1,\ldots,b_n,d)$, siis vastav graafikujuline esitus on järgmise kujuga:

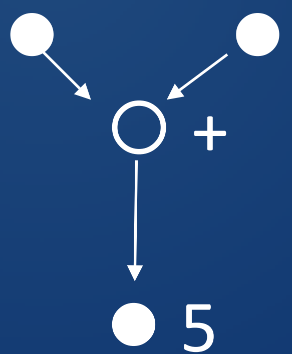


Konstruktsioonisammude esituse näited

- PUUKUJULINE ESITUS:

$$\frac{2 \qquad 3}{5}\ +$$

- JADAKUJULINE ESITUS: $2,3 \vdash_{+} 5$
- GRAAFIKUJULINE ESITUS: 2 3



- KANOONILINE ESITUS: +(2, 3, 5)

Konstruktsiooni esituse näited I

- Konstruktsiooni puukujuline esitus süsteemis $\langle N ; + , \bullet , ^2 \rangle$

$$\dfrac{2 \qquad\qquad \dfrac{(+)\,\dfrac{3 \qquad 5}{8} \qquad\qquad \dfrac{7}{49}\,(^2)}{57}\,(+)}{114}\,(\cdot)$$

- Konstruktsiooni jadakujuline esitus süsteemis $\langle N ; + , \bullet , ^2 \rangle$

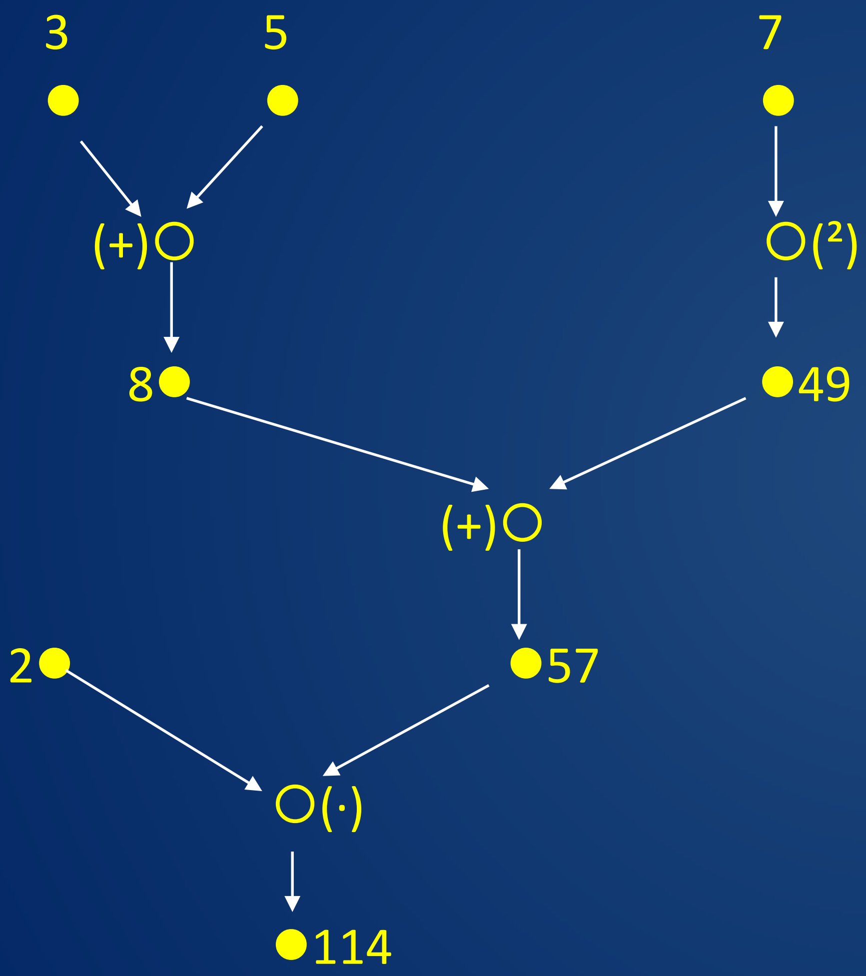
$$2, ((3,5 \vdash_{(+)} 8),(7 \vdash_{(^2)} 49) \vdash_{(+)} 57) \vdash_{(\cdot)} 114$$

- Konstruktsiooni kanooniline esitus süsteemis $\langle N ; + , \bullet , ^2 \rangle$

$\cdot(2, +(+(3, 5, 8), {}^2(7, 49), 57), 114)$

Konstruktsiooni esituse näited II

- Konstruktsiooni graafikujuline esitus süsteemis $\langle N ; + , \cdot , {}^2 \rangle$



Funktsionaalsed esitused

- **Konstruktsiooni esitust** nimetame ***funktsionaalseks esituseks***, kui selles esinevate seoste sümbolite tähendused on kõik erandituit antud struktuuri signatuuri *funktsionaalsed* seosed
- (NB! funktsionaalsete seoste tõttu on vaadeldavale esitusele vastavas konstruktsioonis iga üksiku sammu tulemus üheselt ette määratud ehk determineeritud).
- **Näide,** Vaatleme süsteemi $\langle \mathbf{N} ; \le , {}^2 , + \rangle$ ja selle kahe konstruktsiooni esitusi, millest esimene on funktsionaalne esitus, teine aga mitte:

$$\cfrac{(^2)\,\cfrac{x}{y}\qquad (^2)\,\cfrac{3}{9}}{\cfrac{z}{w}\,(^2)}\;+ \qquad\qquad \cfrac{(^2)\,\cfrac{x}{y}\qquad \le\,\cfrac{3}{8}}{\cfrac{u}{r}\,\le}\;+$$

Determineerivad esitused

- **Konstruktsiooni esitust** nimetame ***determineerivaks* esituseks**, kui selles esinevate algkomponentide sümbolite iga tähenduste "komplekti" jaoks eksisteerib täpselt üks tulemuse sümboli tähendus
- **Järeldus.** Iga funktsionaalne esitus on determineeriv (vt funktsionaalse esituse määratlust)
- **Märkus.** Leidub determineerivaid konstruktsioone, mis **pole** funktsionaalsed.
- **Näide,** Vaatleme süsteemi $\langle \mathbf{N} ; < , {}^{2} , + , \sigma \rangle$, kus $\sigma(x)=0$, kui $x=0$ ning $\sigma(x)=1$, kui $x\neq0$ ja selle süsteemi kahte determineerivat esitust, millest esimene on funktsionaalne, teine aga mitte:

$$\frac{{}^{(2)}\frac{x}{y} \qquad {}^{(2)}\frac{3}{9}}{\frac{z}{w}\,{}^{(2)}}\ {}^{+} \qquad\qquad \frac{{}^{(2)}\frac{x}{y} \qquad {}^{<}\frac{3}{8}}{\frac{u}{r}\,{}^{\sigma}}\ {}^{+}$$

Samaseoselised kanoonilised esitused

- **Määratlus.**
- Kaht ühesammuliste konstruktsioonide kanoonilist esitust $\Phi'(\alpha'_1,\ldots, \alpha'_k, \beta')$ ning $\Phi''(\alpha''_1,\ldots, \alpha''_k, \beta'')$ nimetame **samaseoselisteks süsteemis $\langle H ; \Sigma\rangle$**, kui Φ' ja Φ'' tähenduseks on **üks ja see sama seos** vaadeldava süsteemi signatuurist
- Kaht konstruktsioonide kanoonilist esitust $\Psi'(\Delta'_1, \ldots , \Delta'_n, \rho')$ ning $\Psi''(\Delta''_1, \ldots , \Delta''_n, \rho'')$ nimetame **samaseoselisteks süsteemis $\langle H ; \Sigma\rangle$**, **kui** $\Delta'_1, \ldots , \Delta'_n$ ja $\Delta''_1, \ldots , \Delta''_n$ on selliste konstruktsioonide kanoonilised esitused süsteemis $\langle \mathbf{H} ; \Sigma\rangle$, mis on vastavalt samaseoselised **ja** kui Ψ' ning Ψ'' tähenduseks on **üks ja see sama seos** vaadeldava süsteemi signatuurist
- **Märkus.** Jutt on **samast seosest**, *mitte* samast tähisest

Samaseoseliste kanooniliste esituste näited

- **Vaatleme järgnevates näidetes struktuuri $\langle N ; +, \bullet \rangle$**
- Järgnevate konstruktsioonisammude kanoonilised esitused $+(2,2,4)$ ja $\bullet(2,2,4)$ **pole samaseoselised**
- Järgnevate konstruktsioonisammude kanoonilised esitused $+(2,2,4)$ ja $+(3,2,5)$ **on samaseoselised**
- Järgnevate konstruktsioonide kanoonilised esitused **pole samaseoselised**
  $+(^2(5,25),{}^2(4,16),41)$ ja $\bullet(^2(3,9),{}^2(8,64),576)$
- Järgnevate konstruktsioonide kanoonilised esitused **on samaseoselised**
  $\bullet(^2(5,25),{}^2(4,16),400)$ ja $\bullet(^2(3,9),{}^2(8,64),576)$
- Järgnevate konstruktsioonide kanoonilised esitused **pole samaseoselised**
  $+(\mathbf{^2(3,9)},+(12,4,16),25)$ ja $+(\mathbf{+(12,4,16)},{}^2(3,9),25)$

Isoskeemsed konstruktsioonid

- **Määratlus 1.** Kaht konstruktsiooni nimetame **isoskeemseks süsteemis ⟨H;Σ⟩**, kui neil on vaadeldavas süsteemis olemas samaseoselised kanoonilised esitused.

Märkus. Piltlikult öeldes väljendab konstruktsioonide isoskeemsus seda, et “samades kohtades” rakendatakse asjade “kokkusidumiseks” samu seoseid (mis on pärit etteantud süsteemi signatuurist), kuidas neist seostest ka ei räägitaks või kirjutataks. Lühidalt – “skeem on sama”!

- **Määratlus 2.** Isoskeemsete konstruktsioonide tulemusi nimetame samalaadselt tekitatuteks ehk **isogeneetilisteks.**

Märkus. Tulemuste isogeneetilisus väljendab piltlikult öeldes seda, et nende saamiseks on kasutatud “samades kohtades samu nippe”. **Seejuures aga ei pruugi vastavad tulemused ise sugugi kokku langeda!**

Isoskeemsuse ja isogeneetilisuse näited

- **Vaatleme järgnevates näidetes struktuuri ⟨ N ; +, • ⟩**
- Järgneva kahe konstruktsiooni esitusest võib näha, et need konstruktsioonid **pole isoskeemsed**

$$\dfrac{\dfrac{5}{25}\,(2) \qquad \dfrac{4}{16}\,(2)}{41}\,(+) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{3}{9}\,(2) \qquad \dfrac{8}{64}\,(2)}{576}\,(\cdot)$$

- Arvud 9 ning 4 **on erineval viisil konstrueeritavad** järgmiste esituste kohaselt:

$$\dfrac{3 \qquad 3}{9}\,(\cdot) \qquad\qquad \dfrac{2 \qquad 2}{4}\,(+)$$

kuid sellele vaatamata **on isogeneetilised**, kuna neil ***leiduvad* isoskeemsed konstruktsioonid** ehk konstruktsioonid, millel on samaseoselised kanoonilised esitused: **•(3,3,9)** ning **•(2,2,4)**

Süsteemide baasid

Määratlus.

Vaatleme süsteemi $\langle H; \Sigma \rangle$. Osahulka $B \subseteq H$ nimetame selle **süsteemi baasiks**, kui iga põhihulga H elemendi m korral kas $m \in B$ või leidub vaadeldavas süsteemis vähemalt üks niisugune konstruktsioon, mille tulemuseks on m, kusjuures kõik vastavad algkomponendid on pärit hulgast B.

Baaside näited (I)

- Vaatleme süsteemi **⟨N; ·⟩**, kus N on kõikide naturaalarvude hulk. Selle struktuuri baasiks on hulga {0,1} ja kõikide algarvude hulga A ühend **{0,1}∪A**.

- Vaatleme struktuuri **⟨N; +⟩**. Selle struktuuri baasiks on hulk **{0,1}**.

- Vaatleme struktuuri **⟨K; #⟩**, kus K={1,2,4,8,16,32, ...} ja n#m∫2·n=m. Selle struktuuri baasiks on hulk **{1}**.

Baaside näited (II)

- Vaatleme süsteemi “Mingi mäng”, mille **põhihulga** moodustavad selles mängus **lubatud seisud** ning **signatuuri** moodustavad mängu reegleid kajastavad **üleminekuseosed ühest lubatud seisust teise.** Sellise süsteemi **baasiks** on vastava mängu kõikide **lubatud algseisude hulk.**
- Vaatleme süsteemi “Teatav teooria”, mille **põhihulga** moodustavad selles teoorias **õiged väited** ning **signatuuri** moodustavad selle teooria tuletusreegleid kajastavad **üleminekuseosed ühtedelt õigetelt väidetelt teistele.** Antud süsteemi **baasiks** on vastava teooria kõikide ehk algväidete fundamentaalprintsiipide ehk **aksioomide hulk**

Baaside näited (III)

- Vaatleme kõikide algoritmiliselt arvutatavate ühekohaliste funktsioonide süsteemi $\langle \Phi ; \oplus, *, \mu \rangle$, kus $\Phi \int$kõikide algoritmiliselt arvutatavate ühekohaliste funktsioonide hulk
  $\oplus \int$ ühekohaliste funktsioonide liitmise seos
  $* \int$ ühekohaliste funktsioonide kompositsiooni seos
  $\mu \int$ ühekohaliste funktsioonide pööramise seos
- **(J. Robinson)** Vaadeldava süsteemi **baasiks** on hulk $\{c_{21}, +1\}$, kus $c_{21} \int$ Cantori funktsioon ning
  $+1 \int$ühe võrra suurendamise funktsioon
- **(P. Lorents)** Igat k-kohalist algoritmiliselt arvutatavat funktsiooni **f** on võimalik arvutada järgmisel viisil: $\mathbf{f(x_1,\ldots,x_k)=g(c^k(x_1,\ldots,x_k))}$, kus **g** on sobiv ühekohaline algoritmiliselt arvutatav funktsioon ja $\mathbf{c^k}$ on Cantori funktsioon